昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年8月1日発行　第52巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

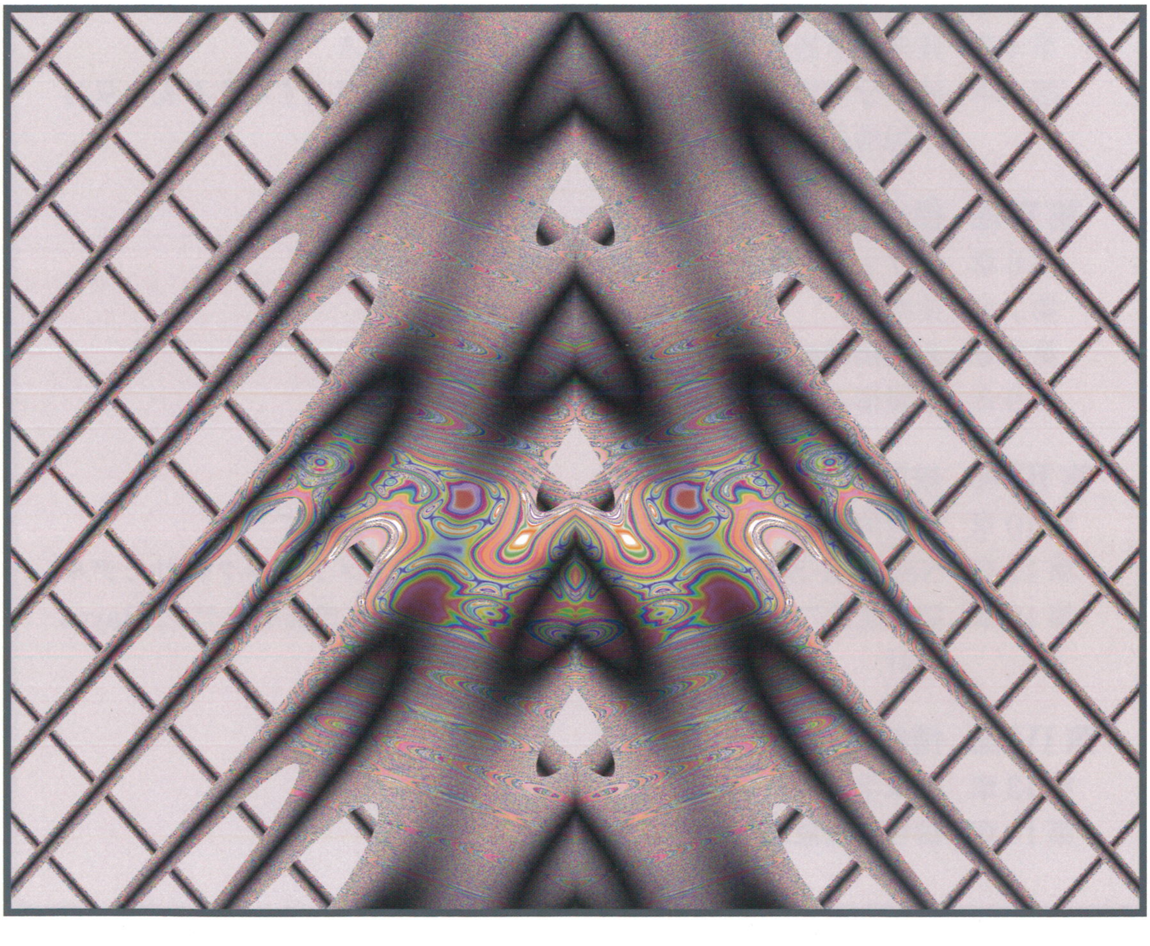
数理科学

8
2014

特集

ベクトル解析の力

多彩な問題を通じてその姿に迫る



No.614

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ- 108：for Senior & Graduate Courses）

格子模型の数理物理

Free fermion 系，Bethe 仮説，Yang-Baxter 方程式，量子群

南　和彦　著

定価 2400 円

本書は可解格子模型（厳密に解ける格子模型）の入門書である．最小限の統計力学の知識から，Ising 模型，Free Fermion 系，Bethe 仮説の基礎を学び，可積分系との関連を視野に，Yang-Baxter 方程式や量子群，ASEP（非対称排他過程）についても解説している．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 614 August 2014

ベクトル解析の力

多彩な問題を通じてその姿に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2011 年/6 省略

2011 年/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014 年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念
/7 モノポールの謎

数理科学臨時別冊一覧

13 年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13 年/12 量子力学ノート
14 年/1 量子情報と時空の物理
14 年/2 弦理論と行列模型
14 年/3 ディラック方程式
14 年/4 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
14 年/5 パーコレーション理論講義
14 年/6 格子模型の数理物理
14 年/7 数物系のためのミラー対称性入門

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN＆ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN＆ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

August 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 614

特集／ベクトル解析の力

巻頭言

二木 昭人

大学１年生の理系の数学教育の２本の柱は微分積分学と線形代数学である．それぞれを通年で学習した後，その後に続くものは，微分積分学においてはベクトル解析であり，線形代数学においてはジョルダン標準形である．私が勤める東京大学ではこれらは２年生の夏学期に教養学部の選択科目として教える．２年前まで勤めていた東京工業大学では数学科２年生には教えていた．

この数学教育のカリキュラムでは１年次教育においてすでに物理学の授業で用いる数学に追いついていない．実際，１年生の電磁気学では高級なベクトル解析を早いうちに使う．１年生の数学の授業で講義室に行くと，前の授業で物理の先生が書いた板書が消されずに残っていて，そこで使っている式は今これからやろうとしている数学の授業内容よりずっと先を行っていて，焦りを感ずることがよくある．

２年次以降の専門教育の先生たちからも１年次数学教育の内容には不満の声が聞こえてくる．東京工業大学においては毎年４月に工学部と数学専攻の教員で懇談会を開き，１年次数学教育のあり方についての意見交換を行っていた（今も続いていると思う）．工学部の要望に応えるべく，いろいろなアイデアを出し合っていたが，決定打というものは見出し難いように思われた．そもそも数学は諸科学を記述する言葉であり，基礎理論である．多岐に渡る諸科学のそれぞれにおいて，これだけの数学的知識があれば十分というパッケージがあるわけではない．少し違うテーマに踏み出すと，また学部生のような気持ちになって初歩から勉強し直さなければならないのは，数学を専門にするものにとっても同じであり，避けることは難しい．多くの場合，出来合いの数学では足りず，その時その時に必要な理論を自分で構成するのが数学の理論である．これはおそらくもの作りの工学的創造性と同じではないかと思う．

さて，ここでのテーマはベクトル解析である．ベクトル解析というのは空間内で滑らかに変化するベクトル値関数，ベクトル場，の微分積分学である．ベクトルを取り扱うので線形代数も援用する．３次元空間の座標を (x,y,z) とすると，ベクトル値関数は $(A(x,y,z),B(x,y,z),C(x,y,z))$ と表される．ここに $A(x,y,z)$ は x, y, z に関する滑らかな関数であり，$B(x,y,z)$, $C(x,y,z)$ についても同様である．例えば川の流れを考え，各点での川の流れの速度ベクトルを考えたものがそのようなものである．もっとも，川の流れは時間 t と共に変化するから $A(x,y,z,t)$ のように４変数と考えるべきかもしれないが，ここでは簡単のため，t には依存しない場合を考えよう．関数 $\varphi(x,y,z)$ の勾配 $(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$ はベクトル場とみなせる．その発散はラプラシアン $\Delta\varphi$ であり，回転を取ると

別のベクトル場が得られる．

しかし，勾配は1年生の微積分で習う全微分の式

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$$

の係数であるから積分の基となる dx, dy, dz の1次結合の係数とみなすべきとも考えられる．関数を係数とする dx, dy, dz の1次結合は1次微分形式，または1形式と呼ばれ，曲線に沿った線積分を定める．また dx, dy, dz の2次式は面積分を定める．ここに2次式とは $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ などの反交換関係を与えた積，外積に関する2次式である．このような説明は代数的な美しさと便利さがあるので，授業でもこういう説明をしたくなるのであるが，必ず出る質問は dx と dy というのは何ですか，という質問である．そうすると接空間とか余接空間という多様体論の話になってしまい，話が長くなってしまう上に聞き手にも伝わらなくなってしまうので，今日のところはこの辺でとりあえず終わりにしましょう，ということになる．上に書いたように数学は諸科学を記述する言葉であり，言葉は習うより慣れよというのが効率的学習方法であるとすれば，多様体論を持ち出す前に計算に慣れることがよろしかろうということになろう．

今回の特集はベクトル解析に問題や例題を通じてその姿に迫るということが趣旨である．数学の学習において演習問題を解くことは大変効果的である．できるだけテキストなどを見ないで，自分で習ったことを再構築してみることが理解を深めることにつながるからである．このことは初学者のみならず，研究者レベルでも同じである．既に得られた定理やその証明でも，少し状況設定や仮定を変えて眺めてみるとそれまでに持っていた印象とずいぶん違って見えることがある．また，別な理論との関連性を調べてみると違う発展性を見出すこともある．研究者としての願望は常に独創的なアイデアで卓越した結果を得て論文を書くことではあるが，成長をしていくには先行研究を少し違う角度で見直すような研究を繰り返すことも必要であると考える．

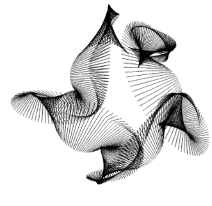
各記事を読めば，ベクトル解析が様々な形に姿を変えながら数学や自然科学の諸分野で用いられていることが垣間見えるのではないかと思う．電磁気学などの物理学の授業がベクトル解析との最初の出会いであるのが一般的であるが，数学の理論としてもリーマン幾何，ローレンツ幾何に自然に拡張され，相対性理論にも用いられる．あまりきつい構造を前提としないトポロジーにおいても関数の勾配ベクトル場を用いるモース理論が有用であり，そのアイデアはゲージ理論やフレアー理論などへと展開している．

数学は目的に応じて，それぞれの使い手が使いながら工夫して定義やら理論を作り変えたりして用いることが大切だと思う．

（ふたき・あきと，東京大学大学院数理科学研究科）

微積分からベクトル解析へ

グリーン・ガウス・ストークスの定理



加 須 栄　篤

連続な導関数をもつ 1 変数関数に対して,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ．微分積分法の基本定理である．これを 3 次元空間に拡張したものがガウスの発散定理であり，次のように述べられる．

曲面 S で囲まれた有界な領域を Ω とし，$\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ において定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について,

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_S d\sigma_S$$

が成り立つ．

本稿の目的は，この定理を用語も含めて説明し，ベクトル解析の入り口に案内することである．

1. ベクトル場

はじめに，数ベクトル空間内の平行四辺形の面積と平行六面体の体積について復習する．2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ で定義され，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さは $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ で与えられる．線形独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形 $\{r\,\boldsymbol{a} + s\,\boldsymbol{b} \mid 0 \leq r, s \leq 1\}$ の面積は

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{1/2} \tag{1}$$

で与えられ，3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体 $\{r\,\boldsymbol{a} + s\,\boldsymbol{b} + t\,\boldsymbol{c} \mid 0 \leq r, s, t \leq 1\}$ の体積は

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}^{1/2} = \left| \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \right|$$

で与えられる．ただし $\det M$ は正方行列 M の行列式を表す．

次に，3 次元空間の領域（連結開集合）Ω を考えよう．Ω の各点 $\boldsymbol{x}$ に対し，1 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{x}), a_3(\boldsymbol{x}))$ を対応させる規則を Ω 上の**ベクトル場**という．a_i $(i = 1, 2, 3)$ は Ω 上の（スカラー値）関数で，$\boldsymbol{A}$ の第 i-成分という．ベクトル場の加法とスカラー積が自然に定まる．また関数 $f : \Omega \to \boldsymbol{R}$ に対して，$f\boldsymbol{A} = (fa_1, fa_2, fa_3)$ によってベクトル場 $f\boldsymbol{A}$ が定まる．以下成分がすべて滑らかな関数であるベクトル場のみを扱う．

滑らかな関数 f に対して,

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

によってベクトル場が定まる．これを関数 f の**勾配ベクトル**という．f を滑らかな曲線 $\boldsymbol{c} : (a, b) \to \Omega$ に制限して考えると，合成関数の微分法から

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{c}(t)) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{c}'(t)$$

となる．これからわかるように $\operatorname{grad} f$ は f が最も大きく増加する方向とその大きさを表している．

また，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，滑らかな関数 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ を対応させる規則を次のように定義する．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

これをベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**発散**とよぶ．ガウスの発散定理の左辺は，ベクトル場の発散の領域上での積分ということになる．

ここでいくつかの演算則を述べる．

(i) 滑らかな関数 f, g に対して，

$$\mathrm{grad}\,(f\,g) = g\ \mathrm{grad}\,f + f\ \mathrm{grad}\,g.$$

これは関数の積に対する微分法である．

(ii) 滑らかな 1 変数関数 $\eta(t)$ に対して，合成関数 $\eta(f)$ が定まるとき，

$$\mathrm{grad}\,\eta(f) = \eta'(f)\ \mathrm{grad}\,f. \qquad (2)$$

これは合成関数の微分法の特別な場合である．

(iii) 滑らかな関数 f とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\mathrm{div}\,(f\boldsymbol{A}) = f\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,f \cdot \boldsymbol{A}. \qquad (3)$$

例題 1 Ω に含まれる有界閉集合の外でゼロであるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3 = 0$$

が成り立つことを示せ．

[解] Ω の外でゼロとすることによって $\boldsymbol{A}$ は空間 $\boldsymbol{R}^3$ 全体で滑らかに定義されているとしてよい．このとき，微分積分法の基本定理より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

が成り立ち，従って重積分の逐次積分法を使って，

$$\int_{\boldsymbol{R}^3} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3 = 0$$

がわかる． □

さて，領域の閉包 $\overline{\Omega}$ において滑らかな関数 f とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について，f あるいは $\boldsymbol{A}$ が Ω 内の有界閉集合の外でゼロであるとき，式 (3) と例題 1 から

$$\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = -\int_\Omega \mathrm{grad}\,f \cdot \boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3 \quad (4)$$

が成り立つことがわかる．ここで領域 Ω は有界であるとする．Ω の上で 1，外で 0 である関数を I_Ω と表すと，I_Ω は領域の境界上で不連続な関数であり，もちろん滑らかではない．したがって $\mathrm{grad}\,I_\Omega$ も定まらない．一方

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3 = \int I_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3$$

であるので，形式的には式 (4) の類推により

$$\int I_\Omega\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3 = -\int \text{“}\mathrm{grad}\,I_\Omega\text{”} \cdot \boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3$$

となる．“$\mathrm{grad}\,I_\Omega$” は領域の内と外では確かに消えており，境界上でのみ意味がありそうであるが，ここを明らかにする必要がある．

2. 曲面と積分

まず曲面の定義から始めよう．空間 $\boldsymbol{R}^3$ の閉部分集合 S が与えられている．S の各点に対して，その点を含む $\boldsymbol{R}^3$ の開集合 B と平面 $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 D から $\boldsymbol{R}^3$ への滑らかな写像 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ が存在して，$\boldsymbol{\phi}$ は単射であり，その像 $\boldsymbol{\phi}(D)$ は $S \cap B$ と一致し，さらに 2 つのベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \phi_3}{\partial u_1}\right),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \phi_3}{\partial u_2}\right)$$

が D の各点 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ で線形独立となるとき，S を**曲面**という．この写像 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ を S の**局所パラメータ表示**という．$S \cap B$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対し，D の点 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が定まって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\phi}(u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$ となる．$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$ を点 $\boldsymbol{x}$ の局所座標といい，$(D, \boldsymbol{u} = (u_1, u_2))$ を S の局所座標系という．2 つのベクトル $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_1$ と $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_2$ によって張られる平面 $\{t\,\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_1 + s\,\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_2 | -\infty < t, s < +\infty\}$ を曲面 S の点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u})$ での**接平面**といい，$T_{\boldsymbol{x}}S$ で表す．2 つのベクトル $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_1$ と $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_2$ が定める平行四辺形 $\{t\,\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_1 + s\,\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_2 \mid 0 \le t, s \le 1\}$ の面積 $\sqrt{G(\boldsymbol{\phi})}$ は，

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u_2} \end{pmatrix}^{1/2}$$

で与えられ((1)参照), $d\sigma_S = \sqrt{G(\boldsymbol{\phi})}du_1du_2$ を S の**面積要素**という．曲面 S の部分 $S\cap B = \boldsymbol{\phi}(D)$ の面積は $\int_D \sqrt{G(\boldsymbol{\phi})}du_1du_2$ で与えられる．S を局所パラメーター表示されるいくつかの部分に分割し，それぞれの部分の面積を足し合わせたものが S 自身の面積と定義する．また，より一般に曲面 S 上の関数 f の積分を

$$\int_S f d\sigma_S = \sum_i \int_{D_i} f(\boldsymbol{\phi}_i)\sqrt{G(\boldsymbol{\phi}_i)}du_1du_2$$

によって定義する．関数が恒等的に 1 に等しいとき，この積分の値が曲面の面積になる（ただし積分は収束しないで発散することもある）．

さて，接平面 $T_{\boldsymbol{x}}S$ に直交するベクトルを S の点 $\boldsymbol{x}$ での**法ベクトル**という．長さ 1 の法ベクトルを単位法ベクトルという．これは 2 通りある．その 1 つを $\boldsymbol{v}$ とすると $-\boldsymbol{v}$ も単位法ベクトルである．

以下曲面 S は有界な領域 Ω を囲んでいるとする（Ω は連結と仮定しているが，その境界である S は連結とは限らない）．S の各点 $\boldsymbol{x}$ での外向き単位法ベクトル $\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{x}) = (n_1(\boldsymbol{x}), n_2(\boldsymbol{x}), n_3(\boldsymbol{x}))$ を考える．正の数 a, b に対して，

$$\Omega(-a,b) = \{\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in S,\ -a<t<b\,\}$$

とおいて，S を含む開集合を定める．また $S^t = \{\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in S\}$ とおく．$|t|$ が十分小さいとき，S^t は曲面をなす．実際 $\boldsymbol{\phi}: D\to S$ を S の局所パラメーター表示とすると，$\boldsymbol{\phi}^t = \boldsymbol{\phi}+t\,\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{\phi}): D\to S^t$ が S^t の局所パラメーター表示を与える．a, b を十分小さいとすれば，$\Omega(-a,b)$ は曲面 S^{-a} と S^b によって囲まれた開集合となる．また，$\boldsymbol{n}_S$ を平行に移動することによって $\Omega(-a,b)$ 上で定義されたベクトル場であると考えることができる．

例題 2　滑らかな関数 f に対して，

$$\int_{\Omega(-a,b)} f\ dx_1dx_2dx_3 = \int_{-a}^{b}\left(\int_{S^t} f d\sigma_{S^t}\right)dt$$

が成り立つことを示せ．

[解]　局所パラメーター表示 $\boldsymbol{\phi}: D\to S$ を利用してこれを確かめよう．$\Omega(-a,b)$ の $\boldsymbol{\phi}(D)$ に対応する部分 $\Omega(-a,b|\boldsymbol{\phi}(D)) = \{\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\phi}(D),\ -a<t<b\}$ と $D\times(-a,b)$ は次の変数変換で対応する．

$$x_1 = \phi_1^t(u_1,u_2) = \phi_1(u_1,u_2) + tn_1(\boldsymbol{\phi}(u_1,u_2))$$
$$x_2 = \phi_2^t(u_1,u_2) = \phi_2(u_1,u_2) + tn_2(\boldsymbol{\phi}(u_1,u_2))$$
$$x_3 = \phi_3^t(u_1,u_2) = \phi_3(u_1,u_2) + tn_3(\boldsymbol{\phi}(u_1,u_2))$$

したがって重積分の変数変換の公式から

$$\int_{\Omega(-a,b|\phi(D))} f\ dx_1dx_2dx_3 = \int_{D\times(-a,b)} f\left|\frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial(u_1u_2t)}\right| du_1du_2dt$$

となる．ここで $|\partial(x_1x_2x_3)/\partial(u_1u_2t)|$（ヤコビ行列式の絶対値）は $\sqrt{G(\boldsymbol{\phi}^t)}$ に等しいことに注意する．実際 $\boldsymbol{n}_S\cdot\boldsymbol{n}_S = 1$ より，$\partial\boldsymbol{n}_S/\partial u_1\cdot\boldsymbol{n}_S = \partial\boldsymbol{n}_S/\partial u_2\cdot\boldsymbol{n}_S = 0$ となり，$\boldsymbol{n}_S$ は $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_1$, $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial u_2$ と直交しているので，$\partial\boldsymbol{\phi}^t/\partial u_1\cdot\boldsymbol{n}_S = \partial\boldsymbol{\phi}^t/\partial u_2\cdot\boldsymbol{n}_S = 0$ が従う．よって

$$\left|\frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial(u_1u_2t)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}^t}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}^t}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}^t}{\partial t}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}^t}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}^t}{\partial u_2}\\ \boldsymbol{n}_S\end{pmatrix}\right| = \sqrt{G(\boldsymbol{\phi}^t)}$$

となる．このことから

$$\int_{D\times(-a,b)} f\left|\frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial(u_1u_2t)}\right| du_1du_2dt = \int_{-a}^{b}\left(\int_D f(\boldsymbol{\phi}^t)\sqrt{G(\boldsymbol{\phi}^t)}du_1du_2\right)dt$$

となり，例題 2 が示された．　□

3. ガウスの発散定理の証明

まず準備として，正の数 ε に対して次のような区分的に滑らかな 1 変数関数 $\eta_\varepsilon(t)$ を用意する．

$$\eta_\varepsilon(t)=\begin{cases} 1 & (t\le -\varepsilon),\\ -\dfrac{t}{\varepsilon} & (-\varepsilon\le t\le 0),\\ 0 & (0\le t).\end{cases}$$

次に $10\delta<\varepsilon$ となる正の数 δ を取り，次のような滑らかな関数 $\eta_{\varepsilon,\delta}(t)$ を用意する．

$$\eta_{\varepsilon,\delta}(t)=\begin{cases} 1 & (t\le -\varepsilon-2\delta),\\ -\dfrac{t}{\varepsilon} & (-\varepsilon-\delta\le t\le -2\delta),\\ 0 & (0\le t).\end{cases}$$

ただし ε を固定して $\delta\to 0$ とするとき，$\eta_{\varepsilon,\delta}(t)$ は $\eta_\varepsilon(t)$ に収束し，$t=-\varepsilon$ および $t=0$ 以外の t に対して，$\eta'_{\varepsilon,\delta}(t)$ は $\eta'_\varepsilon(t)$ に収束するようにしておく．

$\Omega(-a,b)$ の点 $\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{x})$ に対して t を対応させる関数を h で表す．ε が十分小さいとき，合成関数 $\eta_{\varepsilon,\delta}(h)$ は空間全体で定義された滑らかな関数と考えられる．これに対して例題 1 を適用し，$\mathrm{grad}\,\eta_{\varepsilon,\delta}(h)=\eta'_{\varepsilon,\delta}(h)\mathrm{grad}\,h$（式 (2) 参照）および h の勾配ベクトル $\mathrm{grad}\,h$ は $\boldsymbol{n}_S$ になることに注意すると，

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^3}\eta_{\varepsilon,\delta}(h)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\\ &=-\int_{\boldsymbol{R}^3}\mathrm{grad}\,\eta_{\varepsilon,\delta}(h)\cdot\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\\ &=-\int_{\boldsymbol{R}^3}\eta'_{\varepsilon,\delta}(h)\,\boldsymbol{n}_S\cdot\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\end{aligned}$$

を得る．さらに十分小さい ε に対して，$\eta'_{\varepsilon,\delta}(h)$ は $\Omega(-a,b)$ の外でゼロであるから，例題 2 を使うと

$$\begin{aligned}&-\int_{\boldsymbol{R}^3}\eta'_{\varepsilon,\delta}(h)\,\boldsymbol{n}_S\cdot\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\\ &=-\int_{\Omega(-a,b)}\eta'_{\varepsilon,\delta}(h)\,\boldsymbol{n}_S\cdot\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\\ &=-\int_{-\varepsilon-2\delta}^{0}\eta'_{\varepsilon,\delta}(t)\left(\int_{S^t}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_{S^t}\right)dt\end{aligned}$$

となる．ここで $\delta\to 0$ とすると，

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^3}\eta_\varepsilon(h)\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3\\ &=-\int_{-\varepsilon}^{0}\eta'_\varepsilon(t)\left(\int_{S^t}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_{S^t}\right)dt\\ &=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0}\left(\int_{S^t}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_{S^t}\right)dt.\end{aligned}$$

最後に $\varepsilon\to 0$ とすることによって，目的の式

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\;dx_1dx_2dx_3=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_S$$

に至る．

この式と式 (3) を用いると，ガウスの発散定理を次のように述べることができる．

定理 1　曲面 S で囲まれた有界な領域を Ω，S 上の外向き単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_S$ とする．閉領域 $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ において滑らかな関数 f とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,f\cdot\boldsymbol{A})\;dx_1dx_2dx_3\\ &=\int_S f\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_S\end{aligned}$$

が成り立つ．

4. ベクトル場の線積分

領域 Ω 内の滑らかな曲線 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3):[a,b]\to\Omega$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．曲線 $\boldsymbol{c}$ に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線積分を

$$\int_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}:=\int_a^b\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}'(t)\;dt$$
$$\left(=\int_a^b\{a_1(\boldsymbol{c}(t))c_1'(t)+a_2(\boldsymbol{c}(t))c_2'(t)+a_3(\boldsymbol{c}(t))c_3'(t)\}dt\right)$$

によって定義する．媒介変数を $t=t(s)$ $(\alpha\le s\le\beta)$ によって s に変え $dt/ds>0$ とすると，曲線 $\hat{\boldsymbol{c}}(s)=\boldsymbol{c}(t(s))$ に沿うベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線積分は

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{A}&=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}'(s)\,ds\\ &=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}'(t)\frac{dt}{ds}\,ds\\ &=\int_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

となる．このように線積分の値は曲線の向きを変

えない媒介変数の変換によって変わらないことがわかる．曲線の向きを変えると線積分の値は符号だけ変わる．

滑らかな曲線をいくつかつないでできる連続曲線を，区分的に滑らかな曲線という．このような曲線に対しても，滑らかなところでの線積分を足し合わせることによって線積分が定まる．例えば折れ線は区分的に滑らかな曲線である．

例題 3　領域 Ω 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，次の 2 つの条件は同値であることを示せ．

(i)　$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} f$ となる関数 f が存在する．

(ii)　Ω に含まれる任意の区分的に滑らかな曲線 $\boldsymbol{c} : [a,b] \to \Omega$ に沿う $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{c}$ の両端 $\boldsymbol{c}(a)$, $\boldsymbol{c}(b)$ のみにより決まり $\boldsymbol{c}$ にはよらない．

[解]　まず，勾配ベクトル $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} f$ の場合を考えよう．このとき，

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{c}} \operatorname{grad} f &= \int_a^b \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{c}'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{c}(t))dt \\ &= f(\boldsymbol{c}(b)) - f(\boldsymbol{c}(a))\end{aligned}$$

となる．このように線積分の値は曲線の終点 $\boldsymbol{c}(b)$ と始点 $\boldsymbol{c}(a)$ での関数 f の値の差となり，曲線の取り方には依らないことがわかる．とくに閉曲線に沿う線積分の値は常にゼロであることがわかる．

次に (ii) から (i) を示そう．領域内の点 $\boldsymbol{p}$ を一つ固定し，Ω の点 $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ区分的に滑らかな曲線 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) : [a,b] \to \Omega$ をとり，$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{A}$ とおく．このとき，仮定から $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ曲線の取り方にはよらない．さらに $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} f$ が従う．実際 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対して，上のような曲線 $\boldsymbol{c}$ を一つとり，次に正の数 ε に対して，

$$\boldsymbol{c}_\varepsilon(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}(t), & (t \in [a,b]), \\ (x_1 + t - b, x_2, x_3), & (t \in [b, b+\varepsilon]) \end{cases}$$

とおいて，曲線 $\boldsymbol{c}_\varepsilon$ を定める．このとき，f の定

義より

$$
\begin{aligned}
&f(x_1+\varepsilon,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\\
&=\int_{\boldsymbol{c}_\varepsilon}\boldsymbol{A}-\int_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}\\
&=\int_b^{b+\varepsilon}a_1(x_1+t-b,x_2,x_3)dt
\end{aligned}
$$

となり，$\partial f/\partial x_1(\boldsymbol{x})=\lim_{\varepsilon\to 0}(f(x_1+\varepsilon,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3))/\varepsilon = a_1(\boldsymbol{x})$ が従う．同様に $\partial f/\partial x_2 = a_2$，$\partial f/\partial x_3 = a_3$ が検証でき，$\mathrm{grad}\,f=\boldsymbol{A}$ となる． □

次に $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,f$ とは表すことができないベクトル場とはどういうものか考えてみる．

> **例題 4** 曲面 S で囲まれた有界な領域 Ω を考える．$\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，以下の 2 つの条件は同値であることを示せ．
>
> **(i)** $\boldsymbol{A}$ は，Ω 上で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ を満たし，S 上で $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S=0$ を満たす．
>
> **(ii)** $\overline{\Omega}$ 上のすべての滑らかな関数 g に対して
>
> $$\int_\Omega \mathrm{grad}\,g\cdot\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3=0$$
>
> である．

もしベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がこれらの条件を満たすならば，自明でない限り決して $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,f$ とは表せない．実際 (ii) において $g=f$ と選ぶと，$\int_\Omega\|\mathrm{grad}\,f\|^2dx_1dx_2dx_3=0$ となり，$\|\mathrm{grad}\,f\|=0$，すなわち $\boldsymbol{A}=0$ となるからである．

[例題 4 の解] (i) から (ii) は，定理 1 の式から明らかである．(ii) を仮定すると，境界 S 上でゼロとなる任意の関数 g に定理 1 の式を適用して，

$$\int_\Omega g\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\ dx_1dx_2dx_3=0$$

が得られる．これから Ω 上で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ であることが従う．さらに $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな関数 g すべてに対して，

$$\int_S g\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_S=0$$

となるので，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S$ は S 上で消えていなければならない． □

例 1 空間上の滑らかな関数 k と区分的に滑らかな曲線 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3):[a,b]\to\boldsymbol{R}^3$ に対して，

$$\boldsymbol{A}=\int_a^b k(\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}'(t)\ dt$$

とおいてベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を定める．曲線 $\boldsymbol{c}$ が閉じている，すなわち $\boldsymbol{c}(a)=\boldsymbol{c}(b)$ ならば，いたるところ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ である．実際，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}&=\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}\int_a^b k(\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{x})c_i'(t)dt\\
&=-\int_a^b\sum_{i=1}^3\frac{\partial k}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{x})\frac{dc_i(t)}{dt}dt\\
&=-\int_a^b\frac{d}{dt}k(\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{x})dt\\
&=k(\boldsymbol{c}(a)-\boldsymbol{x})-k(\boldsymbol{c}(b)-\boldsymbol{x})\\
&=0
\end{aligned}
$$

となる．もしある正数 R があって，$\|\boldsymbol{x}\|\geq R$ ならば $k(\boldsymbol{x})=0$ という性質を k が満たしているとき，$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{c}$ を含むある有界集合の外ではゼロである．

例 2 空間内の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$ に対して次のように定まるベクトル場を $\boldsymbol{A}$ の**回転**とよび，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表す．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3},\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1},\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$$

このとき，

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$$

が成り立つ．

5. グリーンの定理

滑らかな関数 f に対して

$$\Delta f=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f=\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$$

を f の**ラプラシアン**という．$\Delta f=0$ を**ラプラスの方程式**といい，この方程式を満たす関数 f を**調和関数**という．

定理 2　曲面 S で囲まれた有界な領域 Ω を考える．$\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ において滑らかな 2 つの関数 f, g に対して，次の 2 つの式が成り立つ．

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f\Delta g)dx_1dx_2dx_3 = \int_S f \operatorname{grad} g \cdot \boldsymbol{n}_S \, d\sigma_S. \quad (5)$$

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dx_1dx_2dx_3 = \int_S (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \cdot \boldsymbol{n}_S d\sigma_S. \quad (6)$$

$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} g$ として定理 1 を適用すると (5) が得られる．さらに式 (5) と，この式の f と g を取り替えて得られる式との差をとって式 (6) が得られる．

例題 5　$\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ において滑らかな関数 h が Ω 上で調和であるとする．このとき，

$$\int_S \operatorname{grad} h \cdot \boldsymbol{n}_s d\sigma_s = 0$$

である．さらに $\operatorname{grad} h \cdot \boldsymbol{n}_S$ が境界 S において一定値ならば，h は定数でなければならない．

[解]　$f=1$, $g=h$ として (5) を適用すればよい．また $\operatorname{grad} h \cdot \boldsymbol{n}_S$ が境界 S 上で一定値 c を取るならば $c=0$ でなければならない．さらに $f=g=h$ として (5) を適用すると $\int_\Omega \|\operatorname{grad} h\|^2 dx_1dx_2dx_3 = 0$ となり，$\operatorname{grad} h = 0$，すなわち h が定数であることが従う．　□

さて，$\overline{\Omega}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき，Ω において**ポアソンの方程式** $\Delta g = \operatorname{div} \boldsymbol{A}$ を満たし，S において $g = 0$ を満たす関数 g がただ 1 つ存在することが知られている．さらに $\int_S (\boldsymbol{A} - \operatorname{grad} g) \cdot \boldsymbol{n}_S d\sigma_S = 0$ より，Ω において調和で，S において $\operatorname{grad} h \cdot \boldsymbol{n}_S = (\boldsymbol{A} - \operatorname{grad} g) \cdot \boldsymbol{n}_S$ を満たす関数 h がただ 1 つ存在することも知られている．このとき $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \operatorname{grad} h - \operatorname{grad} g$ とおくと，$\boldsymbol{B}$ は Ω において $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ を満たし，S において $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}_S = 0$ を満たす．このように $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \operatorname{grad} h + \operatorname{grad} g$ と分解できる．これを**ヘルムホルツの分解定理**という．

6. ストークスの定理

これまでガウスの発散定理を 3 次元空間に限定して説明してきたが，一般に n 次元空間で成り立つ．ここでは平面の場合にグリーンの定理として少し形を変えて説明を行い，それを用いてストークスの定理を導き，本稿を終える．

さて，いくつかの滑らかな単純閉曲線（自分自身と途中で交わることがない閉曲線）$\boldsymbol{c}_i : [a_i, b_i] \to \boldsymbol{R}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ で囲まれた平面 $\boldsymbol{R}^2 = \{(u_1, u_2) | u_1, u_2 \in \boldsymbol{R}\}$ 内の領域 R を考える．$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{c}_k$ および $\overline{R} = R \cup \boldsymbol{c}$ とおく．各曲線 $\boldsymbol{c}_i$ は領域 R を左手に見ながら単位の速さで進んでいるとする．すなわち，$\boldsymbol{c}$ 上定義された外向き単位法ベクトルを $\boldsymbol{n_c} = (n_1, n_2)$ とすると，各曲線 $\boldsymbol{c}_i$ は $\boldsymbol{c}_i' = J\boldsymbol{n_c}(\boldsymbol{c}_i) = (-n_2(\boldsymbol{c}_i), n_1(\boldsymbol{c}_i))$ を満たしているとする．ここでベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を反時計回りに 90 度回転してできるベクトル $(-x_2, x_1)$ を $J\boldsymbol{x}$ と表す．$\overline{R}$ において定義されたベクトル場 $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2)$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_R \operatorname{div} \boldsymbol{B} \, du_1du_2 &= \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n_c} \, ds \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} J\boldsymbol{B} \cdot J\boldsymbol{n_c} \, ds \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\boldsymbol{c}_i} J\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで最初の等号はガウスの発散定理による．

さて，$\boldsymbol{B}$ を $J\boldsymbol{B}$ に変えることによって，

$$\int_R \left(\frac{\partial b_2}{\partial u_1} - \frac{\partial b_1}{\partial u_2} \right) du_1du_2 = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{B} \left(= \sum_{i=1}^k \int_{\boldsymbol{c}_i} \boldsymbol{B} \right)$$

が得られる．右辺はベクトル場 $\boldsymbol{B}$ の閉曲線 $\boldsymbol{c}_i$ に沿う線積分の和である．これを **2 次元のグリーンの定理**という．

終わりにストークスの定理を述べよう．有界な領域を囲む曲面 S とその中のいくつかの滑らかな単純閉曲線 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ を境界とする（S 内の）領域 R を考える．各曲線 $\boldsymbol{c}_i$ は領域 R を左手に見ながら進んでいるとする．**ストークスの定理**は次のように述べられる．

定理 3 次の等式が成り立つ．

$$\int_R \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_S = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{A} \left(= \sum_{i=1}^{k} \int_{\boldsymbol{c}_i} \boldsymbol{A}\right)$$

局所パラメーター表示 $\boldsymbol{\phi} : D \to S$ を用いてこれを確かめる．まず局所パラメーター表示される部分 $\boldsymbol{\phi}(D)$ に領域 R が含まれている場合を考える．このとき，

$$b_1 = \boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial u_1}, \quad b_2 = \boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial u_2},$$
$$\boldsymbol{B} = (b_1, b_2)$$

とおくと，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S\sqrt{G(\boldsymbol{\phi})} = \frac{\partial b_2}{\partial u_1} - \frac{\partial b_1}{\partial u_2}$$

となることが計算によって確かめられる．したがって

$$\int_R \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_S d\sigma_S = \int_{\boldsymbol{\phi}^{-1}(R)} \left(\frac{\partial b_2}{\partial u_1} - \frac{\partial b_1}{\partial u_2}\right) du_1 du_2$$

となり，2 次元のグリーンの定理と

$$\int_{\boldsymbol{\phi}^{-1}(\boldsymbol{c})} \boldsymbol{B} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{A}$$

に注意すると，求める等式が得られる．1 つの局所パラメーター表示される部分に領域が含まれない場合は，そのような部分に領域を分割することによってストークスの定理が示される．

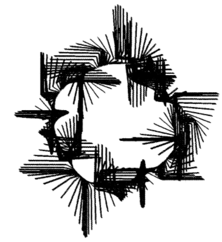
謝辞 大塚浩史氏（金沢大学）には有用なコメントを頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

1) 伊藤清三，『拡散方程式』，紀伊國屋書店，1979 年．
2) 加須栄篤，『リーマン幾何学』，培風館，2001 年．

（かすえ・あつし，金沢大学理工研究域）

ベクトル解析から曲面論へ



井ノ口 順一

ベクトル解析の学習目標の一つは，（加須栄先生の記事で解説された）ガウス・ストークスの定理とよばれる「曲面上の積分定理」である．本稿では積分を行う舞台である曲面の取扱いを解説する．

1. 曲面

例題 1　3 次元空間内の曲面の表現方法を説明せよ．

（解説）　まず線型代数で学んだ 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面のベクトル表示を復習しよう（図 1 を参照）．点 P_0 を通り，2 本の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張られる平面を Π とする．P_0 の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ と表すと，Π 内の任意に選んだ点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に対し

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b}$$

となる実数の組 (u_1, u_2) がただ一組だけ存在する．

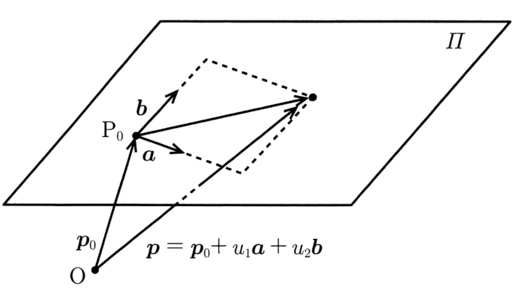


図 1　平面．

$\boldsymbol{p}$ は数平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (u_1, u_2) に対し位置ベクトル $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b}$ を対応させているから

$$(u_1, u_2) \longmapsto \boldsymbol{p}(u_1, u_2) := \boldsymbol{p}_0 + u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b} \quad (1)$$

というベクトル値函数 $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ と思うことができる．

問 1　平面を定めるベクトル値函数 (1) のヤコビ行列

$$D\boldsymbol{p}(u_1, u_2) = (\boldsymbol{p}_{u_1}, \boldsymbol{p}_{u_2}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2}\right)$$

の階数が 2 であることを確かめよ．

（答）　$D\boldsymbol{p}(u_1, u_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ であり，仮定から $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は線型独立．□

この観察をもとに $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を定義する．

定義 1　(u_1, u_2) を座標系とする数平面 $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $\mathcal{D}$ で定義されたベクトル値函数

$$\boldsymbol{p}(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$$

が以下の条件をみたすとき**曲面片**（surface piece）とよぶ．

- $x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)$ は $\mathcal{D}$ 上で C^∞ 級の函数（何度でも偏微分できる）．
- ヤコビ行列 $D\boldsymbol{p}$ の階数はつねに 2．

もちろん平面は曲面片の例である．

例 1（柱面）　開区間 (a, b) で定義された xy 平面

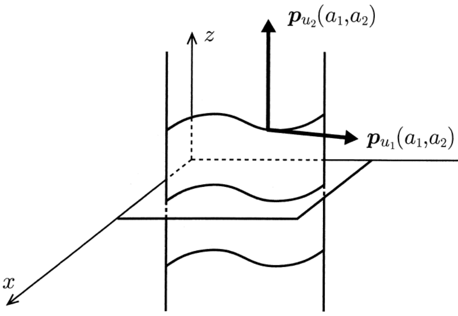


図 2　柱面．

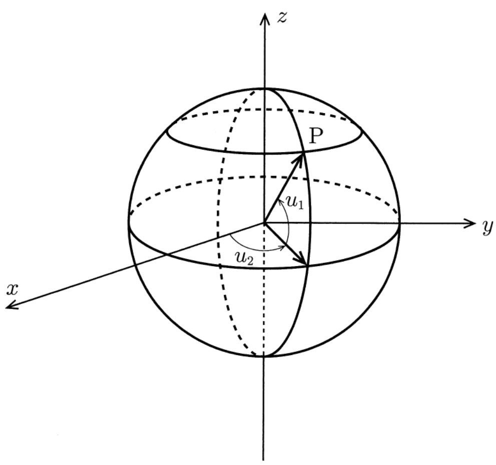


図 3　球面．

内の曲線 $(x(u_1), y(u_1))$ を考える．ただし $x(u_1)$, $y(u_1)$ は u_1 の C^∞ 級函数であり $(x')^2+(y')^2=1$ をみたしていると仮定する（プライム $'$ は u_1 に関する微分演算）．このとき領域 $\mathcal{D}=\{(u_1,u_2)\mid a<u_1<b\}$ 上のベクトル値函数

$$\boldsymbol{p}(u_1,u_2)=(x(u_1),y(u_1),u_2) \tag{2}$$

は曲面片を定める．これを曲線 $(x(u_1),y(u_1))$ 上の**柱面**とよぶ（図 2）．

原点を中心とする半径 r の球面

$$\mathbb{S}^2(r)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$$

上の点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ は緯度 u_1 と経度 u_2 を使って

$$\boldsymbol{p}=(r\cos u_1\cos u_2, r\cos u_1\sin u_2, r\sin u_1) \tag{3}$$

と表せる（図 3）．

ところでパラメータ (u_1,u_2) はどこを動くだろうか．$\boldsymbol{p}$ のヤコビ行列は領域 $\mathcal{D}=\{(u_1,u_2)\mid |u_1|<\pi/2\}$ 上で階数 2 である．$\boldsymbol{p}$ は北極・南極に対応する点 $u_1=\pm\pi/2$ でも定義できるが

$$D\boldsymbol{p}\left(\pm\frac{\pi}{2},u_2\right)=\begin{pmatrix}\mp r\cos u_2 & 0\\ \mp r\sin u_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

なのでこれらの点では曲面片を定めないのである．領域 $\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2 \mid v_1^2+v_2^2<r^2\}$ で定義されたベクトル値函数

$$\boldsymbol{q}_+(v_1,v_2)=\left(v_1,v_2,\sqrt{r^2-v_1^2-v_2^2}\right)$$

も曲面を与えるが，$\mathbb{S}^2(r)$ の上半分しか表せない．同様に

$$\boldsymbol{q}_-(v_1,v_2)=\left(v_1,v_2,-\sqrt{r^2-v_1^2-v_2^2}\right)$$

は $\mathbb{S}^2(r)$ の下半分しか表せない．球面全体を一つの曲面片で覆うことはできないが，曲面片をいくつか併せれば球面を得ることができる．

そこで，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 M がいくつか（無限個でもよい）の曲面片の集まりであるとき，$\mathbb{R}^3$ 内の**曲面**（surface）とよぶ[*1]．曲面 $M\subset\mathbb{R}^3$ に対し，一つの曲面片 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(u_1,u_2):\mathcal{D}\to\mathbb{R}^3$ を指定したとき，$\boldsymbol{p}$ を M の**パラメータ表示**，(u_1,u_2) をパラメータとか**局所座標系**とよぶ．□

以下では主にパラメータ表示を一つ固定して議論を進める．

定義 2　$(a_1,a_2)\in\mathcal{D}$ とする．$\mathbb{R}^3$ 内の平面

$$\{a\boldsymbol{p}_{u_1}(a_1,a_2)+b\boldsymbol{p}_{u_2}(a_1,a_2)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

を (a_1,a_2) における曲面 M の**接平面**とよび $T_{(a_1,a_2)}M$ で表す．

*1)　曲面片を単に集めればよいというわけではない．正確には「2 次元多様体の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込みを曲面とよぶ」と定める．

例題 2　曲面 M 上の 2 点 A と B を結ぶ曲線 C を結ぶ曲線の長さを求めよ．

（解説）　曲線 C のベクトル表示は $\mathcal{D}$ 内の曲線 $(u_1(t), u_2(t))$（ただし $a \leq t \leq b$ とする）を $\boldsymbol{p}$ で写したもの $\boldsymbol{p}(t) := \boldsymbol{p}(u_1(t), u_2(t))$ で与えられる（図 4）から求める長さは

$$\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \mathrm{d}t = \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(u_1(t), u_2(t)) \right| \mathrm{d}t$$

で計算できる．合成函数の微分法より

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

であることから

$$\left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \right|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_j} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}$$

と表せる．

$$g_{ij} := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_j}$$

とおくと曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t$$

と書き直せる．□

行列値函数 I を

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

で定め，曲面 M のパラメータ表示 $\boldsymbol{p}$ に関する**第一基本行列**とよぶ（$g_{12} = g_{21}$ に注意）．

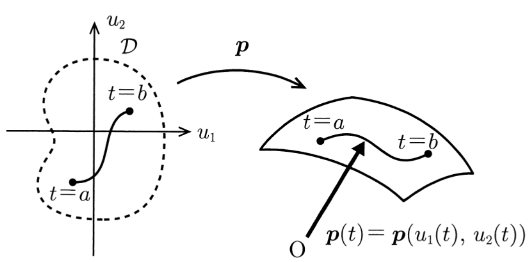


図 4　曲面内の曲線．

例題 3　曲面の曲がり方を表す函数を与えよ．

（解説）　パラメータ表示 $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{p}_{u_1}$ と $\boldsymbol{p}_{u_2}$ は線型独立であるから外積（ベクトル積）を用いて曲面に沿う単位ベクトル場

$$\boldsymbol{n}(u_1, u_2) = \frac{\boldsymbol{p}_{u_1} \times \boldsymbol{p}_{u_2}}{|\boldsymbol{p}_{u_1} \times \boldsymbol{p}_{u_2}|}$$

が定まる．これを**単位法ベクトル場**とよぶ．接平面 $T_{(a_1,a_2)}M$ は「$\boldsymbol{p}(a_1, a_2)$ を通り $\boldsymbol{n}(a_1, a_2)$ を法ベクトルにもつ平面」であることに注意しよう．

位置ベクトル場 $\boldsymbol{p}$ を 2 回偏微分して得られるベクトル場 $\boldsymbol{p}_{u_i u_j}$ は一般には曲面に接しない（法線方向の成分をもつ）．そこで $\boldsymbol{p}_{u_i u_j}$ の法線方向の成分 $h_{ij} = \boldsymbol{p}_{u_i u_j} \cdot \boldsymbol{n}$ に着目する．h_{ij} を並べてできる行列値函数

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

を**第二基本行列**とよぶ．

平面の場合，$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ であるから，これは**変化しない**ベクトルである．**見方を変えると**，曲面 M が曲がっていれば，その曲がり具合は $\boldsymbol{n}$ の変化を追えばつかめるはず．そこで $\boldsymbol{n}$ を偏微分しよう．$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$ の両辺を u_1 で偏微分すると $\boldsymbol{n}_{u_1} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ が得られる．u_2 についても同様．したがって $\boldsymbol{n}_{u_1}$, $\boldsymbol{n}_{u_2}$ はともに曲面に接するから $-\boldsymbol{n}_{u_j} = S_{1j}\boldsymbol{p}_{u_1} + S_{2j}\boldsymbol{p}_{u_2}$ $(j = 1, 2)$ とおける*2)．S_{ij} を並べた行列値函数

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

を**形状作用素**とよぶ．このとき次が成立する．

命題 1　$S = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}$.

定義 3　形状作用素 S の固有値を**主曲率**とよぶ．

2 つの主曲率 κ_1, κ_2 の代わりに主曲率の平均 $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ と主曲率の積 $K = \kappa_1\kappa_2$ を

*2)　習慣により左辺に $-$ をつけてある．

用いてもよい．K を曲面 M の**ガウス曲率**，H を M の $\boldsymbol{n}$ に関する**平均曲率**とよぶ[*3)]．□

問 2 平面，柱面，球面のガウス曲率および平均曲率を求めよ．

（答） 平面 (1) では $H = K = 0$．柱面 (2) では $K = 0$．平均曲率は曲線 $(x(u_1), y(u_1))$ の**曲率** $\kappa = x'y'' - x''y'$ を用いて，$H = -\kappa/2$ で与えられる．球面 (3) は $H = 1/r$, $K = 1/r^2$．□

定義 4 $\kappa_1 = \kappa_2$ をみたす点を**臍点**（せいてん）とよぶ．

この問から，平面と球面では，すべての点が臍点であることがわかる．逆にすべての点が臍点である曲面（**全臍的曲面**）は平面または球面（の一部）であることが証明できる．また平面，円柱面，球面は主曲率が定数の曲面である．主曲率は一定な曲面（等径曲面）はそれらに限る．

ガウス曲率と平均曲率はともに I と II を用いて定義されたが，実は K は I だけで決まる量である（内的量）．この事実はガウスの驚愕定理とよばれリーマン幾何学誕生の契機となった．

4. 曲面上での函数の積分

例題 4 曲面 M 上で定義された函数 f を積分するにはどのように計算すればよいか答えよ．

（解説） パラメータ表示 $\boldsymbol{p}: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ においてこの領域に対応する曲面の表面積を計算してみよう．$\mathcal{D}$ 内の小さな長方形領域

$$\{(u_1, u_2) \mid a_j \leq u_j \leq a_j + \Delta u_j,\ j = 1, 2\}$$

に対応する M の部分の面積は $\boldsymbol{p}_{u_1}(a_1, a_2)\Delta u_1$ と $\boldsymbol{p}_{u_2}(a_1, a_2)\Delta u_2$ で張られる平行四辺形の面積 $|\boldsymbol{p}_{u_1}(a_1, a_2) \times \boldsymbol{p}_{u_2}(a_1, a_2)|\Delta u_1 \Delta u_2$ で近似できる（図 5）．

$$|\boldsymbol{p}_{u_1} \times \boldsymbol{p}_{u_2}|^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$$

と計算できるので，$\mathcal{D}$ に対応する部分の表面積は

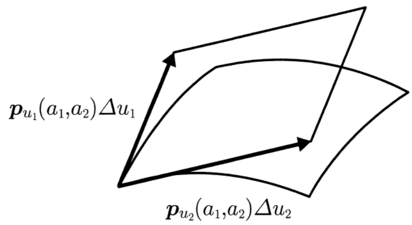


図 5 表面積の計算イメージ．

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2$$

で求められることがわかる．ここで

$$\mathrm{d}A = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2$$

を**面積要素**とよぶ．

曲面 M 上で定義された函数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対し，その $\mathcal{D}$ 上の面積分を

$$\int_{\mathcal{D}} f\, \mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{D}} f(u_1, u_2)\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2$$

で定義する．□

5. ガウス曲率の積分

M を $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面とする[*4)]．M 上でガウス曲率 K を積分してみよう．K は内的量であるから積分の値（**全ガウス曲率**）も当然，内的量であるがより強い結論が得られる．

定理 1（ガウス・ボンネの定理）

$$\int_M K\, \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M).$$

ここで $\chi(M)$ は M の**オイラー標数**とよばれ，M の**位相だけで決まる量**である．閉曲面の穴の数（種数）を g とすると $\chi(M) = 2 - 2g$ である．

ガウス・ボンネの定理は大域的な微分幾何学の出発点といえる定理であり，「ベクトル解析から曲面論へ至る道」のゴールと言える．

*3) $\boldsymbol{n}$ を反対向きに変えても K は変化しないが H は符号が逆転する．

*4) 正確にはコンパクトで境界がない曲面．また向き付け可能であると仮定する．

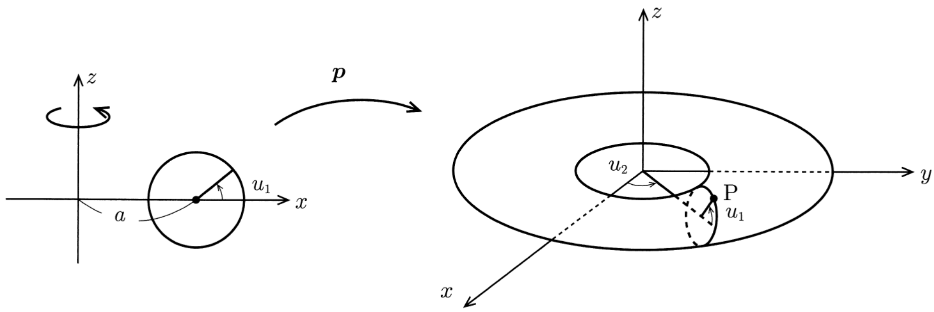


図 6　回転トーラス．

6. 曲面論へ

ガウス曲率は曲面の内的量であるが，平均曲率は第二基本行列に依存する量であり，曲面 M が $\mathbb{R}^3$ にどのように実現されているかを表す量である（外的量）．平面と平面でない柱面はともに $K=0$ であるが，平均曲率はそれぞれ $H=0$, $H=-\kappa/2$ と異なる．

平均曲率がつねに 0 である曲面は極小曲面とよばれ，現在も微分幾何学の主要な研究対象の一つである．平均曲率が 0 でない一定値である曲面は CMC 曲面（constant mean curvature surface）とよばれ，活発に研究されている．CMC 曲面は無限可積分系とよばれる分野とも密接に関わる．曲面の微分幾何と無限可積分系の関わりについては，文献 5) と文献 8) を参照されたい．

ガウス曲率以外の函数を積分するとどのようなことがわかるだろうか．ガウス曲率の絶対値については次の不等式が知られている．

定理 2（チャーン・ラショフの不等式[3)]）

$$\int |K|\,\mathrm{d}A \geq 2\pi(4-\chi(M)).$$

この不等式は空間曲線に対するフェンチェルの定理[6)]の曲面版と思える．

平均曲率 H の平方 H^2 を閉曲面上で積分してみよう．

$K>0$ となる点の集合を M_+, $K<0$ となる点の集合を M_- で表すとガウス・ボンネの定理より

$$2\pi\chi(M) = \int_{M_+} K\,\mathrm{d}A + \int_{M_-} K\,\mathrm{d}A.$$

一方，チャーン・ラショフの不等式より

$$\int_{M_+} K\,\mathrm{d}A - \int_{M_-} K\,\mathrm{d}A \geq 2\pi(4-\chi(M))$$

であるから

$$\int_{M_+} K\,\mathrm{d}A \geq 4\pi$$

を得る．$H^2-K=(\kappa_1-\kappa_2)^2/4 \geq 0$ に注意すると

$$\int_M H^2\mathrm{d}A \geq \int_{M_+} H^2\mathrm{d}A \geq \int_{M_+} K\mathrm{d}A \geq 4\pi$$

が得られる．

定理 3（ウィルモア[11)]）$\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面 M において

$$\int_M H^2\,\mathrm{d}A \geq 4\pi.$$

等号成立は M が球面（全臍的な曲面）であるとき．

したがって球面は積分 $\int_M H^2\,\mathrm{d}A$（**ウィルモア汎函数**）の最小値を与える閉曲面として特徴づけられた．ウィルモア汎函数は $\mathbb{R}^3$ の共形変換で不変という性質をもつことを注意しておく[10)]．球面以外の閉曲面についてウィルモア汎函数の値はどうなるだろうか．

例 2（回転トーラス（図 6））

$$((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

において

$$\int H^2\,\mathrm{d}A = \frac{\pi^2}{(b/a)\sqrt{1-(b/a)^2}}.$$

とくに $a:b=\sqrt{2}:1$ と選べばウィルモア汎函数

の値は $2\pi^2$ である．

ウィルモア[12]と塩濱勝博・高木亮一[9]は回転トーラスを含む特別な種類の種数 1 の閉曲面（空間閉曲線の管状近傍の境界として与えられる曲面）に対し $\int H^2\,\mathrm{d}A \geq 2\pi^2$ が成立すること，等号は $a:b = \sqrt{2}:1$ の回転トーラスに限ることを証明した．これらの成果をもとに次の予想が提起された*5)．

ウィルモア予想　$\mathbb{R}^3$ 内の種数 1 の閉曲面 M（すなわち輪環面と同相な曲面）において

$$\int_M H^2\,\mathrm{d}A \geq 2\pi^2.$$

等号成立は $a:b=\sqrt{2}:1$ の回転トーラス（と共形同型な曲面）に限る．

長らく未解決であったこの予想はマルケスとネヴェス[7]によって最近解決された．

ウィルモア汎函数の停留点となる曲面を**ウィルモア曲面**とよぶが，ウィルモアと独立にフォス（Voss）も 1950 年代に研究していたという．彼らは 19 世紀から 20 世紀初頭の共形幾何（メビウス幾何）においてウィルモア汎函数・ウィルモア曲面が研究されていたことを再発見した（ブラシュケの教科書[2]を参照）．またジェルマンは弾性曲面と名付けていた[4]．共形幾何学の枠組みでウィルモア曲面を考察することで，ウィルモア曲面と $SO(4,1)$ 型戸田方程式とよばれる偏微分方程式（無限可積分系）との対応が導かれる．

ベクトル解析を学ぶと，目の前に「曲面の微分幾何学」という豊穣な幾何学の世界が待っている．極小曲面，CMC 曲面，ウィルモア曲面など活発に研究されている対象が目白押しである．つねに面白い研究対象が開拓されている*6)．ベクトル解析を学んだあとは，ぜひ曲面の微分幾何を学んでいただきたい．曲面論へようこそ！

*5) 正確にはウィルモア汎函数の共形不変性を用いて 3 次元球面内の曲面の問題に書き換えて考察する．

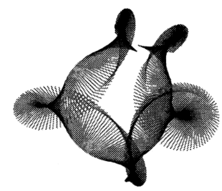
*6) 一般の 3 次元リーマン多様体では共形変換群が自明であることが多く，$\mathbb{R}^3$ のときとは事情が全く異なる．2000 年にイギリスのリーズ大学で開催された研究集会で筆者が 3 次元等質リーマン空間内の極小曲面について研究発表をしたとき，ウィルモア先生（1919–2005）は「ハイゼンベルグ群でウィルモア曲面を考えることはできないか」と質問をされた．ウィルモア先生は $\mathbb{R}^3$ のときのように豊かな内容をもつ曲面のクラスを定曲率でない等質リーマン空間でどう考えるべきかに関心をもたれたのだと思う．その後，ベルディンスキとタイマノフ[1]がいくつかの等質空間に対し“ウィルモア曲面”の候補を提案したが，研究はまだ始まったばかり．彼らの定義が最善かどうかの検討もこめて，これからの研究が待たれる．

参考文献

1) D.A. Berdinskiĭ and I.A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups, *Siberian Math. J.* **46** (2005), 1005–1019.
2) W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* III, Springer, 1929.
3) S.-S. Chern and R.K. Lashof, On the total curvature of immersed manifolds, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 306–318.
4) S. Germain, *Remarques sur la nature, les bornes et l'etendue de la question des surfaces elastiques, et equation de ces surfaces*, Paris, 1926, Mémoire sur la courbure des surfaces, *Crelle J. Math.* **7** (1831), 1–29.
5) 井ノ口順一・梶原健司・筧三郎・松浦望・太田泰広・Wolfgang Schief,『離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012』, COE レクチャーノート 40, 九州大学，2012.
6) 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』裳華房（新装版；1995）.
7) F.C. Marques and A. Neves, Min-Max theory and the Willmore conjecture, *Annals of Math.*, **179** (2014), 683–782.
8) C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Univ. Press (2002).
9) K. Shiohama and R. Takagi, A characterization of a standard torus in $\boldsymbol{E}^3$, *J. Differential Geom.*, **4** (1970), 477–485.
10) J.H. White, A global invariant of conformal mappings in space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), no.1, 162–164.
11) T.J. Willmore, Note on embedded surfaces, An. Şti. Univ. “All. I. Cuza” Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **11B** (1965), 493–496, Mean curvature of immersed surfaces, ibid. **14** (1968) 99–103.
12) T.J. Willmore, Mean curvature of Riemannian immersions, *J. London Math. Soc.*, (2) **3** (1971), 307–310.

（いのぐち・じゅんいち，山形大学理学部）

多様体上の微積分



小 林　治

1．関数の微分

多様体とはその上で微積分ができるような空間概念である．多様体 M 上の何回でも微分可能な実数値関数全体は乗法的単位元 1 を持つ可換代数をなし $C^\infty(M)$ と書く．この可換代数 $C^\infty(M)$ は多様体 M の性質を事実上すべて握っていることが証明できる．この観点から多様体上の微分法の話を始めよう．「微分可能」と言う言葉を使った以上，この説明の前に，関数の微分とは何か？微分可能とは何か？が説明されるべきだが，あまり気にしないように．ここでは定数関数は微分可能でその微分は 0 である．さしあたりそのような何かであるとしておこう．点 $p \in M$ および関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\iota_p(f) = f(p) \tag{1}$$

とすれば $\iota_p\colon C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ は線形写像である．$(\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ を $\{fg|\ f, g \in \mathrm{Ker}\,\iota_p\}$ の張る $C^\infty(M)$ の線形部分空間とすれば，$(\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ は $\mathrm{Ker}\,\iota_p$ の線形部分空間でもある．そこで

$$T_p^*M = \mathrm{Ker}\,\iota_p/(\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$$

と置くと，これもベクトル空間で M の p における**余接空間**と言う．$f \in C^\infty(M)$ に対して明らかに $f - f(p) \in \mathrm{Ker}\,\iota_p$ であるから，これは T_p^*M の要素 $(f - f(p)) + (\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ を定める．これを $df_p \in T_p^*M$ と書き，f の点 p での**微分**と言う．何だか微分を定義しているようだ．しかし極限記号は出てこないし，普通の微分と同じなのだろうか？と心配する人もいるかも知れない．Leibniz 則

$$d(fg)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p \tag{2}$$

を確かめてほしい．そうすれば上に述べた考え方で確かに微分の本質的な部分を捉えていることが納得できると思う．

この定義には少しだけ問題がある．上の定義に忠実に従えば明らかに，$p,\ q \in M$ に対して $0 \in T_p^*M \cap T_q^*M$ である．しかしこのようには考えない．T_p^*M の要素にはすべて p と言う**タグ**がついている見なし，$p \neq q$ のとき $T_p^*M \cap T_q^*M = \emptyset$ とする．空集合でないものを空集合と考えよ，と無理を言っているのではない．厳密には定義の修正が必要であると言っている．難しい話では全くないが，詳細は多分に形式的で抽象的になるだけなので省く．読者の皆さんの演習問題としておく．非交和 $T^*M = \bigcup_p T_p^*M$ を**余接束**と言う．

ベクトル空間 T_p^*M の線形双対空間を

$$T_pM = (T_p^*M)^*$$

と書き，これを M の p における**接空間**と言う．その要素を**接ベクトル**と言う．余接空間のときと同様に，$p \neq q$ のとき $T_pM \cap T_qM = \emptyset$．そして非交和 $TM = \bigcup_p T_pM$ を**接束**と言う．全然幾何学的なイメージが結び付かないと不満に思う人もいると思う．次の節で少しばかり接ベクトルの説明をする．

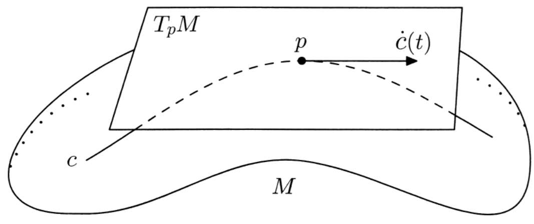


図 1　速度ベクトル．

2. 速度ベクトル

時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置が $c(t) \in M$ であるような点の運動を考える．c は，すべての $f \in C^\infty(M)$ に対して $f(c(t))$ が t の関数として（高校数学の意味で何回でも）微分可能であるとき，**滑らかな**曲線と言う．t を 1 つとめて，$p = c(t)$ とする．線形写像

$$C^\infty(M) \to \mathbf{R};\ f \mapsto \frac{d}{dt} f(c(t)) \qquad (3)$$

を考える．すると $df_p = dg_p$ のとき，すなわち $f - g - f(p) + g(p) \in (\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ のとき，一般に $h \in (\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ に対して $\frac{d}{dt}h(c(t)) = 0$ であるから，$\frac{d}{dt}f(c(t)) = \frac{d}{dt}g(c(t))$ が分かる．すなわち (3) は線形写像 $T_p^*M \to \mathbf{R}$，すなわち T_pM の要素，を与える．これを曲線 c の**速度ベクトル**と言い $\dot{c}(t) \in T_pM$ と書く．任意の接ベクトルは必ず滑らかな曲線の速度ベクトルとして表せる．接ベクトルを理解するのに，運動する点と言うイメージが加わるので少し安心感がある（図 1）．ここまで多様体上の微分学の形式数学的な側面を述べたが，これが初級編である．

3. 加速度ベクトル

さて本稿で論じたい基本問題は次である．

問題． 多様体 M 上の滑らかな曲線 c の加速度ベクトルを定式化せよ．

なぜこのような簡単に見えることが問題なのだろうか？ (3) からの類推で

$$C^\infty(M) \to \mathbf{R};\ f \mapsto \frac{d^2}{dt^2} f(c(t)) \qquad (4)$$

とすれば良いのではないか？ しかしこれでは一般に接ベクトルにならないのである．一般に $h \in (\mathrm{Ker}\,\iota_p)^2$ に対して $\frac{d^2}{dt^2}h(c(t)) = 0$ ではないので，$df_p = dg_p$ から $\frac{d^2}{dt^2}f(c(t)) = \frac{d^2}{dt^2}g(c(t))$ が示せない．したがって T_pM の要素を定めない．辛うじて $\dot{c}(t) = 0$ となる時刻 t のときに，(4) は接ベクトルを定める．これは関数のヘシアンが臨界点においては素直に 2 次形式として定まることと根は同じである．仕方がない．加速度ベクトルは速度ベクトルとは別のベクトル空間に属すると割り切ってしまうのも一つの考え方である．しかしこれでは微積分の柔軟な運用ができないのではないか？ 加速度ベクトルも接ベクトルとして表す方法がないか？ これが問題である．物理学でも加速度ベクトルの考え方は基本的である．速度が相対的であるのに対して加速度はより本質的である．これまで述べてきたように，多様体では速度ベクトルは確固として定まるのに加速度の定義が自明でないということは，多様体の概念そのものに問題があるのではないか？と案ずる人もいるかも知れない．結論を言うと多様体の概念に根本的な問題があるのではない．加速度の概念が，重要ではあるものの絶対的なものでなく，何らかの人為的な指定を必要とするものなのである．力学では，加速度 0 の運動は等速直線運動ということになっている．ここに「**直線**」と言う言葉が入っていることに注意しよう．つまり加速度を定式化することは，直線に相当する幾何学的概念を定式化することと関係している．単に微分の問題ではなく幾何学が関係している．

4. 初心にかえって

さて問題は

$$\ddot{c}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\dot{c}(t+h) - \dot{c}(t)}{h}$$

の決め方である．$p = c(t)$ と書いて $\dot{c}(t) \in T_pM$ であるが，一般に $\dot{c}(t+h) \in T_pM$ でないことが話を拗らせている．しかし図 2 を見ると引き算 $\dot{c}(t+h) - \dot{c}(t)$ はできるような気配である．ただ

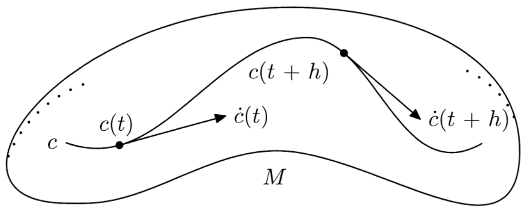


図2　加速度ベクトルは？

しその結果は点 p における接ベクトルにはならないだろうけれど．その差ベクトルを点 p における接空間に正射影したものを“$\dot{c}(t+h)-\dot{c}(t)$”に相当するものとすれば何とかなるのではないか？ 実際この考え方でほぼ何とかなる．Gauss の曲面論の要諦である．Atiyah[1] が物理学の専門家を前にして力説しているのも興味深い．もちろん検討しないといけないことはたくさんある．まず，初めの引き算は多様体 M らしきものが，「**平行移動**」の方法が定まった，より次元の高い空間内にあることを前提としているようだ．より高い次元の空間の中に多様体を配置する方法は一意的でないので，まずこの部分に不定性がある．つまり加速度ベクトルは決め方はいろいろあるので，$\ddot{c}(t)$ と書かずに

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}$$

と書くことにしよう．記号 ∇ が加速度ベクトルの決め方を表している．これを**共変微分**（別名**接続**，より限定的には**アファイン接続**）と言う．いったん決めてしまえばこの微分法は強力である．多様体での微分法を学ぶとき，Lie 微分や外微分などの微分法が登場するが，すべて共変微分を用いて表すことができる．また加速度ベクトルの問題から得られた方法であるが，この問題が片付くと，3 階微分，さらにより高階微分まですべて決まる．要するに，基盤となる 1 階微分の確定と，その次の 2 階微分をどう決めるかが微分法の鍵となる．このあたりの概念的な説明は部分的ではあるが，文献 7) の IV.7 節に書かれている．前節で述べたように，接続を決めれば $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}=0$ を満たす曲線として，初等幾何の「直線」に相当する**測地線**が定義できる．多様体の幾何学の出発点である．ここまで来て中級編の半ばであろう．

5. ベクトル束の接続

前節の接続は多様体の接束の理論である．接束の接続をアファイン接続と言う．多様体論を展開するのにベクトル束の理論は必須である．本来非線形な多様体と線形空間の混合物であるので初心者は戸惑うようだ．ベクトル束 $E\to M$ の接続の定式化を述べよう．$\Gamma(E)$ でベクトル束 E の滑らかな切断全体の空間を表す．$U_i\subset M$ を局所自明化近傍とする．つまり $E|U_i=U_i\times\mathbf{R}^r$．$U_i$ に限っては，この積構造から，$p,\,q\in U_i$ に対して E_p から E_q への平行移動が決まる．その接続を ∂ と書く．$X\in T_xM,\ s\in\Gamma(E)$ に対して

$$\nabla_X s=\partial_X s+A_i(X)s$$

と表す．$A_i(X)\in\mathrm{End}\,(E_x)$ である．ここで $\mathrm{End}\,(E_x)$ は E_x から E_x への線形変換全体を表す．この 1 形式の族 $A=(A_i)$ を**接続形式**と言う．局所自明化近傍を乗り換えたとき，A_i と A_j が満たすべき変換則を押さえれば，これで接続の完成である．変換則を考えると，果して大域的な接続の存在は大丈夫かと心配になる．この変換則は大変柔軟で，つまるところこの心配は無用である．

$$F(X,Y)s=\nabla_X\nabla_Y s-\nabla_Y\nabla_X s-\nabla_{[X,Y]}s$$

で定まる F を**曲率形式**と言う．また，

$$F=dA+A\wedge A$$

となり，これは $\mathrm{End}\,(E)$ に値を取る 2 形式である．この方程式は $F(X,Y)s=dA(X,Y)s+A(X)A(Y)s-A(Y)A(X)s$ を表す．曲率形式は接続形式と違って大域的な 2 形式である．接続の不変量の中でも特別に重要なものであるが，本稿の趣旨と離れてしまうのでこれ以上の解説はしない．

6. 標準接続

多様体が与えられると接続は存在する．それも非常に多く存在する．Riemann 計量の無限次元空

間と比べても接続の空間のほうがはるかに大きい．数ある接続の中で，何か特別に良い接続が選べないか？ Yang–Mills 理論はこのタイプの問題を扱う．アファイン接続でも類似の考察がある[2)]．

一方，別の幾何構造から接続を一意的に選ぶことができる場合がある．一つは（正定値とは限らない）Riemann 計量 g が与えられているときで，$\nabla g = 0$ となる捩れ 0 のアファイン接続が一意的に存在する．これは以前は Riemann 接続と呼ばれていたが，最近では Levi-Civita 接続と言うのが普通のようだ．Gauss の曲面論に起源を持つこの事実は **Riemann 幾何学の基本定理**と呼ばれるほどである．もう一つの事例は複素多様体上の複素ベクトル束で，正則構造を持ちかつ Hermite 計量を持つときで，詳しく述べないが一意的に接続を定める方法がある．これも以前は Hermite 接続と呼ばれていたが，最近は決まった呼び方はないようである．どちらの接続も，Riemann 幾何，複素多様体論それぞれで役に立つ．

この段階に来れば多様体上の微分法としては中級レベル修了と言えるだろう．

7. スピナー解析

微積分からベクトル解析，ベクトル解析から多様体上の微積分，つまり接続に基づく微分法によるテンソル解析．この流れで行くと次は**スピナー解析**（昔ならばスピノル解析と読まれただろう）であろう．邦文の教科書は少ないが（例えば文献 5)），今や常識となっているので簡単に解説しておく．

$\mathbf{R}^n$ は実 n 次元ベクトル空間で，標準的な内積を仮定する．$\mathbf{C}(m)$ で m 次の複素正方行列の全体を表す．$1 \in \mathbf{C}(m)$ で単位行列を表す．$k = \lfloor n/2 \rfloor$ とし（$\lfloor\cdot\rfloor$ は Gauss 記号），複素ベクトル空間 $S_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^{2^k}$ を**スピナー空間**と言う．線形写像 $\gamma\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}(2^k)$ は

$$\gamma(v)^2 = -|v|^2 \cdot 1$$

を満たすとする．このような γ は $\mathbf{C}(2^k)$ の共役，すなわち $\gamma(v) \mapsto P^{-1}\gamma(v)P$ の変換，と n が奇数のときは符号 $\pm$，を除いて一意的に決まることが Clifford 代数の理論より分かっている．$k = \lfloor n/2 \rfloor$ はそうなるように選ばれた数である．$n \leq 3$ の範囲で γ を具体的に表すことは手頃な演習問題であるので是非試みてほしい．$U \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とする．ベクトル値関数 $\psi\colon U \to S_{\mathbf{C}}$ を U 上の**スピナー**と言う．$e_i \in \mathbf{R}^n$ を第 i 成分が 1，他は 0 のベクトルとする．$\{e_i\}$ はベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の標準的な正規直交基底である．スピナー ψ に対して

$$\not{D}\psi = \sum_{i=1}^{n} \gamma(e_i)\frac{\partial}{\partial x^i}\psi$$

で定義される微分作用素 $\not{D}$ を **Dirac 作用素**と言う．また，

$$\not{D}^2\psi = -\Delta\psi = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2\psi$$

である．ここで Δ は**ラプラシアン**．

> **問題.** n 次元多様体 M 上の Dirac 作用素 $\not{D}$ を定式化せよ．

これは難しい問題である．まず M には Riemann 計量が与えられていることが必要であろう．階数が 2^k の複素ベクトル束 $S \to M$ も定義されるべきであろう．これは**スピナー束**と呼ばれることになり，その切断が多様体 M 上の**スピナー**となる．Dirac 作用素を定義することが基本的な目的である．そのためにはスピナー ψ の微分が定義されないといけない．何らかの形でベクトル束 $S \to M$ の接続，できれば一意的に決まる接続がほしい．おそらく最も微妙なのは，接ベクトル $X \in TM$ とスピナー ψ に対してスピナー $\gamma(X)\psi$ をいかに定義するかであろう．

これだけのことがすべて満たされるような一般的な方法は果して可能なのだろうか？ 簡単のため M は向き付け可能で，正の向きが指定されているとする．次のことが分かっている．$P \to M$ を TM の Riemann 計量 g に関する正の向きの正規直交枠全体の成すファイバー束とする．ファイバーは特殊直交群 $SO(n)$ に微分同相である．$\tilde{P}$ は P の 2 重被覆で，ファイバー毎に P の 2 重被覆になっているものとする．$n \geq 3$ のとき $SO(n)$ の基本群は

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ であることに注意する．このようなファイバー束 $\tilde{P} \to M$ が存在するための条件は，代数トポロジーの議論によって，第 2 Stiefel–Whitney 類と呼ばれるコホモロジー類 $w_2(M) \in H^2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ が 0 となることと同値であることが示される．この $\tilde{P} \to M$ を用れば，スピナー束 $S \to M$ が定義され，その接続が Levi-Civita 接続と関連付けられて一意的に指定され，さらに TM の S への作用も決まることを示すことができる．申し分のない完璧さではなかろうか．この条件を満たす多様体，つまり $w_2(M) = 0$ を満たす多様体を**スピン多様体**と言う．次元 $n \leq 3$ の場合，すべての向き付け可能多様体はスピンである．4 次元多様体がスピンであるかどうかはコホモロジー環が関係している．複素射影平面 $\mathbf{CP}^2$ はスピンでないとだけ言っておこう．

ただ，この方法がすべてかと言うとそうではない．補助的に複素直線束とその接続を用意して，**スピン$^{\mathbf{c}}$ 構造**と言う，スピン多様体であることよりもより弱い条件で多様体上の Dirac 作用素を定義することができる．4 次元コンパクト多様体はすべて スピン^c 構造を持つことが，これも代数トポロジーの議論で示すことができる．

スピン構造ならびに スピン^c 構造は非常によくできた多様体の構造論で，じっくり学べば誰もが感動できる数学だと思う．この幾何学の主役は Dirac 作用素で，その方程式から分かる多様体論の深い結果には枚挙に遑がない．

8. 多様体上の積分

積分の話に移る．以下では特に問題は立てないが，読者諸氏も実際に手を動かしながら確かめてほしい．「微分形式の積分」と「関数の積分」を混同している人が多いようだ．前者は「向き」の指定がないと定義されないが，後者は「向き」とは関係なく定義できる．つまり向き付け可能でない多様体上でも関数の積分は定義できる．積分公式もベクトル解析の段階では，Green の公式，Stokes の公式，Gauss の発散公式は大同小異だが，一般

化されると, Stokes の公式は微分形式の積分公式, Gauss の発散公式は関数の積分公式となる.

多様体上の関数の積分の導入部は大体次のようになる. $n=\dim M$ とする. 直線束 $\Lambda^n T^*M$ に計量 h を入れる. $d\mu=\{\omega\in\Lambda^n T^*M \mid |\omega|=\sqrt{n!}\}$ を**体積要素**(体積形式ではない!)と言う. ここで $\sqrt{n!}$ があるが, これは標準的正規化のための係数で, 微分形式のノルムの取り方の流儀に依存する. Riemann 計量 $g=g_{ij}dx^i dx^j$ が与えられたとき, g の誘導する $\Lambda^n T^*M$ の計量に対して

$$d\mu=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n$$

となる. 体積要素は $\Lambda^n T^*M$ の計量と 1 対 1 の関係がある. 体積要素を指定すると, コンパクトな台を持つ連続関数に対して Riemann 積分が定義できるのは通常通り. また外測度を $d\mu$ からこれも標準的な方法で定め, これから完備測度空間 (M,μ) を構成し, Lebesgue 積分の定式化もできる. Riemann 積分を使う積極的な理由はないので, 多様体での積分論は基本的に Lebesgue 積分である.

9. Gauss の発散公式

$d\mu$ を M の体積要素とする. $X\in\Gamma(TM)$ を接ベクトル場とする. $d\mu$ は局所的には n 形式 $\pm\omega$ のペアである. Lie 微分を用いて

$$L_X\omega=(\operatorname{div}X)\omega$$

は明らかに

$$L_X(-\omega)=(\operatorname{div}X)(-\omega)$$

と同値なので, $\pm\omega$ の選び方に依らず, $d\mu$ に関する X の**発散** $\operatorname{div}X\in C^\infty(M)$ が定義される.

$D\subset M$ をコンパクトな領域とし, 境界 ∂D は余次元 1 の部分多様体とする. $d\sigma$ を ∂D の $n-1$ 次元体積要素とする, 1 形式 α は, $d\mu|\partial D=\alpha\wedge d\sigma$, ∂D の接ベクトル Y に対して $\alpha(Y)=0$, ∂D に沿う U から見て外向きベクトル ν に対して $\alpha(\nu)>0$ の 3 条件を満たすものとする. これで α は ∂D に沿う 1 形式として一意的に決まる. **Gauss の発散公式**は

$$\int_D \operatorname{div}X\,d\mu=\int_{\partial D}\alpha(X)\,d\sigma$$

である. 体積要素が Riemann 計量から決まっているとき, ∂D に沿う外向き単位法線ベクトル場を ν と書くと, $\alpha(X)=\langle X,\nu\rangle$ である. この形になればベクトル解析に出てくる Gauss の発散公式と確かに同じものであると納得できるであろう. この定式化で D, そして ∂D も向き付け可能性は問題にしていないことに注意する. コンパクトな台を持つベクトル場 X に対して

$$\int_M \operatorname{div}X\,d\mu=0$$

である. 以下 $Xf=df(X)\in C^\infty(M)$ のような記法を用いる. Xf は f の X による**方向微分**である. $X\in\Gamma(TM)$, f, $u\in C^\infty(M)$ で, u はコンパクトな台を持つとする. すると fuX はコンパクトな台を持つベクトル場で, $\operatorname{div}(fuX)=uXf+fXu+fu\operatorname{div}X$ であるから, Gauss の公式より直ちに次が得られる

$$\int_M uXf d\mu=-\int_M f(Xu+u\operatorname{div}X)d\mu \quad (5)$$

10. 超関数

コンパクトな台を持つ滑らかな関数の全体を $C_0^\infty(M)$ と書く. 線形写像 $T\colon C_0^\infty(M)\to\mathbf{R}$ を Schwartz の**超関数**と言う. 正確には「連続性」の条件が必要だがここでは省く. 連続関数 f に対して $I_f\colon C_0^\infty(M)\to\mathbf{R}$ を

$$I_f(u)=\int_M fu\,d\mu$$

と置けば I_f は超関数である. 2 つの連続関数に対して $I_f=I_g$ ならば $f=g$ を示すのは容易である. よって I_f と f を同一視する. このように超関数は連続関数を含む概念である. 局所可積分関数までこの事実は一般化できる. 自明ではない. 一方 (1) の ι_p も $C_0^\infty(M)$ に制限すれば超関数である. これは I_f の形に書けない超関数である. 無理矢理 $\iota_p=I_f$ と見なしたときの仮想的な関数 f が, いわゆる Dirac のデルタ関数である.

この理論の面白い所は微分にある．超関数 T に対してベクトル場 X による方向微分 XT を超関数として

$$(XT)(u) = -T(Xu + u\,\mathrm{div}\,X) \qquad (6)$$

で定義する．もしある $f \in C^\infty(M)$ に対して $T = I_f$ ならば，Gauss の発散公式からの帰結 (5) は $XT = I_{Xf}$ であることを言っている．Xf が定義できるためには f が普通の意味で微分可能である必要があるが，(6) の右辺は T に関する微分可能性を全く気にかけてない．つまり普通の意味で微分可能でない関数でも，それが超関数と見なせれば (例えば局所可積分関数のように連続でさえない関数も入る)，超関数としては微分可能，それも何回でも微分可能である．超関数微分を**弱微分**とも言う．これは夢のある話に聞こえるが，どこかに落とし穴があるのではと疑念を持つ人もいるだろう．案外うまく行っている．例えば M が連結で任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して $XT = 0$ ならば $T = I_r$（ここで $r \in \mathbf{R}$ は定数関数）が証明できる．

多様体上の積分法の話に切り替えたつもりが，また微分の話になってしまった．紙数も尽きたのでこの辺で打ち切りにするが，多様体では微積分はもちろんのこと，さらに進んだ解析学もかなり展開できる．私にとっては多様体上の Fourier 解析の定式化の完成度が今一つのように思える．おそらく勉強不足のためであろう．

参考文献

1) M.F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills fields*, Springer, 1979.
2) O. Kobayashi, A variational problem for affine connections, *Arch. Math.* **86** (2006), 464–469.
3) 小林 治，『微分積分（試読版）』，2013, `http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kobayashi/`
4) —，『曲線・曲面論（試読版）』，2013, ibid.
5) —，『多様体（試読版）』，2013, ibid.
6) 小林 治，芥川和雄，井関裕靖，『山辺の問題』，数学メモアール 7，日本数学会，2013.
7) S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer, 1970.

（こばやし・おさむ，大阪大学大学院理学研究科）

勾配ベクトルから低次元トポロジーへ



遠藤 久顕

1. はじめに

高校では主に1変数関数の微積分を学ぶが，大学では多変数関数の微積分を学ぶ．偏微分や重積分など多変数の微積分に関する基礎事項を学んだ後に待っているのが，本特集のテーマであるベクトル解析である．Gauss, Green, Stokes といった数学者・物理学者の名を冠した積分定理がその主役である．ベクトル解析も多変数の微積分には違いないが，1変数の微積分の単純な一般化ではなく，現代の幾何学において重要な概念の芽を多く含んでいる[1,2]．曲線や曲面といった概念が扱われ，変換や変形に関する不変性なども議論される．トポロジー（位相幾何学）との関連に目を向けると，ポテンシャルの存在条件と de Rham コホモロジー，Ampère の法則と絡み数などの話題がある[3,4]．

勾配ベクトルはベクトル解析に欠かせない概念であるが，積分定理などとは別の場面，すなわち多変数関数の極値を求める問題において初めて出会う人も多いであろう．本稿では，勾配ベクトルを1つの道標とし，多変数関数の極値から出発して低次元トポロジーのある話題へ至る一筋の道を辿ってみたい．

2. Maxwell の『丘陵と渓谷』

電磁気学を建設した J.C. Maxwell は，1870 年に『丘陵と渓谷』（On Hills and Dales）と題した短い論文を発表している[5]．これは 1859 年に A. Cayley によって発表された『等高線と傾斜線』（On Contour and Slope Lines）という論文に触発されたものであり[6]，地形学への数学的なアプローチについて述べられている．その中にある1つの考察を取り上げよう．

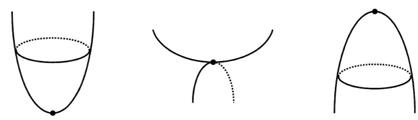


図1 谷底，峠，山頂．

海に浮かぶ1つの島がある．島は山がちで起伏に富んでおり，いくつかの谷底と峠と山頂がある（図 1）．どの谷底の標高も海面より高く，島の中に沼や湖はないものとする．また，島内にトンネルや橋のような地形は現れないものとする．

問題1 この島にある谷底，峠，山頂の個数をそれぞれ a, b, c とする．このとき，$a + c = b + 1$ が成り立つことを示せ．

Maxwell は問題1に次のような解答を与えている．海面が徐々に上昇する様子を考えよう．このとき，島の内部にある土地にも海面と同じ高さまで水が溜まるものとする．まず，島で一番低い谷底に水が溜まり，それがだんだんと大きな沼になっていく．次に，島で二番目に低い谷底に水が溜まり，沼ができる．さらに海面が上昇すると，水没する峠が現れる．峠が水没する瞬間，次の (1), (2)

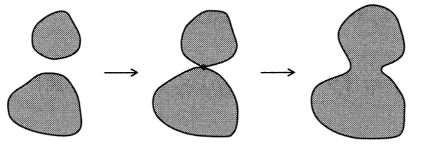


図2　(1) のタイプの峠と沼の形状の変化.

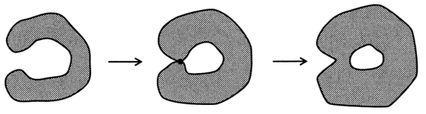


図3　(2) のタイプの峠と沼の形状の変化.

のどちらか一方が起こる. (1) 2つの沼がつながり1つの大きな沼ができる (図2). (2) 1つの沼の2つの湾がつながり, 沼の中に島ができる (図3). (1) のタイプの峠が b_1 個, (2) のタイプの峠が b_2 個あるとすると, 明らかに $b_1+b_2=b$ である. 海面の上昇が続き, すべての山頂が海面下に没すると, 島はなくなってしまう.

ここで, 沼の個数の変化に注目しよう. 便宜上, 島の外側に広がる海も1つの沼と考える. 海面が徐々に上昇するとき, 谷底が1つあるごとに沼が1つ増える. 一方, (1) のタイプの峠が1つあるごとに沼の個数は1つ減る. 最初に沼 (海) は1つあり, 最後も沼 (海) は1つであるから, 谷底の個数と (1) のタイプの峠の個数は同じでなければならない. すなわち, $a=b_1$ である. 次に, 陸地の個数の変化に注目しよう. 海面が徐々に上昇するとき, (2) のタイプの峠が1つあるごとに陸地が1つ増える. 一方, 山頂が1つあるごとに陸地が1つ減る. 最初に陸地 (島) は1つあり, 最後に陸地はなくなるので, 先ほどと同様の議論により $c=b_2+1$ であることがわかる. 以上より,

$$a+c=b_1+b_2+1=b+1$$

となる.

3. 勾配ベクトルと極値の判定

現代の数学を用いて問題1の状況を考察するには, 2変数関数を考えるのがよいであろう.

平面上の2変数関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が C^∞ 級であるとする. 平面上の点 $p_0=(x_0,y_0)$ における f の**勾配ベクトル**は,

$$(\mathrm{grad}\, f)(p_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0),\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right)$$

と定義される. $(\mathrm{grad}\, f)(p_0)=(0,0)$ をみたすような p_0 を f の**臨界点**という. p_0 が f の臨界点であるとき, 2×2 行列

$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)\end{pmatrix}$$

を, p_0 における f の **Hesse 行列**という. $H_f(p_0)$ が正則行列であるような p_0 を**非退化**な臨界点という. 大学の微積分の授業では, 偏微分の応用として次の定理を学ぶ.

> **定理1**　p_0 が f の非退化な臨界点であるとし, $H_f(p_0)$ の2つの固有値を α,β とする. (1) α,β がともに正ならば, f は p_0 で極小である. (2) α,β の一方が正, もう一方が負ならば, f は p_0 で極値をとらない (鞍点である). (3) α,β がともに負ならば, f は p_0 で極大である.

2変数の Taylor の定理を用いると, 適当な座標変換の下, f は p_0 の近くで (1) $x^2+y^2+f(p_0)$, (2) $-x^2+y^2+f(p_0)$, (3) $-x^2-y^2+f(p_0)$ によって近似されることがわかる. このことから定理1が従う. 定理1において, Hesse 行列の成分を

$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

と表せば, α,β の符号に関する上の条件は次のように言い換えられる：(1) $AC-B^2>0$ かつ $A>0$, (2) $AC-B^2<0$, (3) $AC-B^2>0$ かつ $A<0$. これがよく知られた極値の判定条件である.

一般に, n 変数関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ と点 $p_0\in\mathbb{R}^n$ に対しても, 第1次偏導関数を並べたものとして勾配ベクトル $(\mathrm{grad}\, f)(p_0)$ が定義され, 第2次偏導関数を並べたものとして Hesse 行列 $H_f(p_0)$ が定義される. p_0 が f の非退化な臨界点であるとき, $H_f(p_0)$ の固有値はすべて0でない実数であ

り，そのうちの負の固有値の個数 $k = k(p_0)$ を p_0 における f の**指数**という．このとき適当な座標変換の下，f は p_0 の近くで

$$-x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 + f(p_0)$$

によって近似され，定理1と同様の定理が成り立つ．

定理1の (1), (2), (3) の場合，p_0 における f の指数はそれぞれ $0, 1, 2$ であり，これらは問題1の谷底，峠，山頂にそれぞれ対応する．

4. Morse 関数と多様体のハンドル分解

問題1は，2変数関数の各指数の臨界点の個数の間には関係がある，ということを教えている．より一般的な状況でこのことを考察してみよう．

n 次元**多様体**とは，局所的に n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ と同じ形をした空間のことである．1次元多様体，2次元多様体はそれぞれ曲線，曲面と呼ばれる．逆に，曲線や曲面といった概念を一般化したものが多様体であるという見方もできる．多様体では局所座標を考えることで微積分を行うことができ，関数の臨界点やその非退化性，指数を座標不変な概念として定義することができる．

問題2　多様体上の関数のいろいろな種類の臨界点の個数に対し，それらの間の関係を見出せ．

M を n 次元多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を M 上の C^∞ 級関数とする．f のすべての臨界点が非退化であるとき，f を M 上の**Morse 関数**という．非退化とは限らない臨界点を扱うことは，定理1を用いずに極値の判定を試みることに相当し，単純ではない．そこで，以下では Morse 関数のみを扱う．そのような都合のよい関数が存在するかどうかが心配であるが，次の定理が成り立つ[7,8]．

定理2　任意の n 次元閉多様体 M 上に Morse 関数が存在する（実は非常に多く存在する）．

問題1では，海面が上昇して谷底や峠，山頂を越える瞬間に，陸地や沼の形状がどのように変化するかが重要であった．これは，M 上の Morse 関数 f に対し，M の部分集合

$$M_t = \{p \in M \mid f(p) \le t\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

の変化を追うことに対応する．次が成り立つ[7,8]．

定理3　n 次元閉多様体 M 上の Morse 関数 f が $f^{-1}([a,b])$ の内部にただ1つの臨界点 p_0 を持つとき，M_b は M_a に k-ハンドルを接着した多様体に微分同相である．ここで，k は p_0 における f の指数である．

n 次元の **k-ハンドル**とは，k 次元球体と $n-k$ 次元球体の積 $h = D^k \times D^{n-k}$ のことであり，h を n 次元多様体 M_a に接着するとは，ある C^∞ 級埋め込み $\varphi : \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial M_a$ によって h と M_a の境界の一部を同一視することをいう．

定理3を繰り返し用いることにより，任意の閉多様体は有限個のハンドルに分解できることがわかる．さらに強く，次が成り立つ[7,8]．

定理4　任意の n 次元閉多様体 M は，いくつかの 0-ハンドルに，いくつかの 1-ハンドル，2-ハンドル，…，n-ハンドルを順に接着して得られる多様体（**ハンドル体**）X に微分同相である．X を M の**ハンドル分解**という．

n 次元ハンドル体 X に対して，0-ハンドルから k-ハンドルまでのすべてのハンドルの和集合を X_k と表す．空間対の特異ホモロジー群 $C_k = H_k(X_k, X_{k-1})$ と，空間の三つ組のホモロジー完全系列の連結準同型 $\partial_* : C_k \to C_{k-1}$ によって定まるチェイン複体 C_* のホモロジー群 $H_*(C_*)$ は，X の特異ホモロジー群 $H_*(X)$ と同型になる．C_k の階数は X の k-ハンドルの個数 $a_k(X)$ に等しいから，Euler–Poincaré の公式より

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k(X) = \chi(X)$$

となる．ここで，$\chi(X)$ は X の **Euler 標数**であり，X の特異ホモロジー群の階数の交代和として定義される位相不変量である．

以上の議論から次が従う[7,8]．

定理 5 n 次元閉多様体 M 上の Morse 関数 f に対し，f の指数 k の臨界点の個数を $n_k(f)$ とする．このとき，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n_k(f) = \chi(M)$$

が成り立つ．

位相不変量とは，荒っぽく言えば空間の連続的な変形によって変わらない量のことである．定理5は，Morse 関数の臨界点の個数が，多様体の位相不変量によって制限を受けることを意味している．問題2に対する1つの解答と考えてもよいであろう．定理5は，ある条件の下で M が境界を持つ場合にも成り立つが，特に $M = D^2$ とすると

$$n_0(f) - n_1(f) + n_2(f) = \chi(D^2) = 1$$

となる．これが問題1の等式 $a - b + c = 1$ に他ならない．

実は，以上のストーリーの裏側でも勾配ベクトルが活躍している．定理3の証明では，f と両立する勾配状ベクトル場を考え，その積分曲線を利用して微分同相写像を構成する．定理4の証明では，ハンドルのスライドという操作を行うために，勾配状ベクトル場が用いられる．

5. Heegaard 図式と Kirby 図式

定理5は，多様体の Euler 標数は Morse 関数の臨界点の個数がわかれば計算できる，という定理であると解釈することもできる．これまでは，関数の臨界点の個数に注目してきたが，主客を入れ替えて次の問題を考えてみよう．

問題 3 Morse 関数を用いて多様体の位相的な性質を調べよ．

あまりにも漠然とした問題であるが，実は解答を導く1つのカギが既に示されている．定理4により，n 次元閉多様体 M 上の Morse 関数から M のハンドル分解 X を構成することができる．X は M に微分同相であるから，X を構成するハンドルとそれらの接着の仕方が完全に記述できれば，ある意味において M を理解できたことになる．これは，胞体複体や単体複体の構造を用いて空間を理解しようとする立場に近い．

そこで，ハンドルの接着を記述する良い方法があるかどうかが問題となる．多様体の次元が低い場合には，効果的な図示法が知られており，ハンドル体を「見る」ことが可能である．以下ではこれを説明しよう．

M を連結な3次元有向閉多様体とし，X を M のハンドル分解とする．ハンドルの消去を行うことにより，X の 0-ハンドルと 3-ハンドルはそれぞれ1つであるとしてよい．さらに，定理5の直前の議論と Poincaré 双対定理より，X の 1-ハンドルと 2-ハンドルは同じ個数（g 個）であることがわかる．X の 0-ハンドルと 1-ハンドルの和集合を X_-，2-ハンドルと 3-ハンドルの和集合を X_+ とすると，これらは $S^1 \times D^2$ の g 個のコピーの境界連結和 $H_g = \natural g S^1 \times D^2$ に微分同相である．$X = X_- \cup X_+$ であるから，M は，H の2つのコピーをある微分同相写像 $\psi : \partial H_g \to \partial H_g$ によって貼り合わせた多様体 $H_g \cup_\psi H_g$ に微分同相である．これを M の **Heegaard 分解**という．

さて，X の 3-ハンドルの接着の仕方は1通りであることが知られているので，0-ハンドル，1-ハンドル，2-ハンドルの接着の仕方を決めれば X の構造が定まる．そこで，0-ハンドル D^3 の境界 $\partial D^3 = S^2$ から1点を除いたものを $\mathbb{R}^2$ と同一視し，$\mathbb{R}^2$ 上に 1-ハンドルの接着面 $\partial D^1 \times D^2$，2-ハンドルの接着面 $\partial D^2 \times D^1$ を描く．1-ハンドルの接着面は2つの D^2 であり，これらを線対称な位置に描く（図4左）．2-ハンドルの接着の仕方は接着面の中心線 $\partial D^2 \times \{0\}$ のみで決まるので，単純閉曲線を1つ描く（図4右）．また，2-ハンドルの接着面が 1-ハンドルの $D^1 \times \partial D^2$ の部分にかかる場合は，1-ハンドルの接着面をつなぐように図5のような曲線を描く．1-ハンドルの接着面 $\{-1\} \times D^2$，$\{1\} \times D^2$ は線対称な位置に描かれており，図5の4本の曲線の端点の集合も線対称になっている．図には表れない，$D^1 \times \{x\}$ $(x \in \partial D^2)$ という形

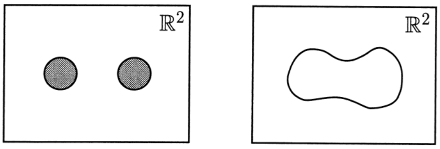


図 4　3 次元の 1-ハンドル・2-ハンドル．

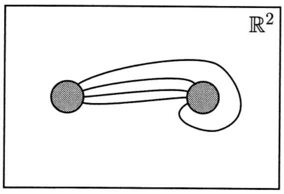


図 5　1-ハンドルの上を渡る 2-ハンドル．

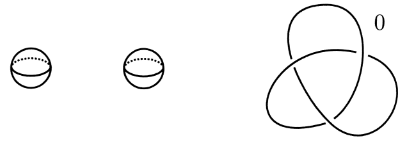


図 6　4 次元の 1-ハンドル・2-ハンドル．

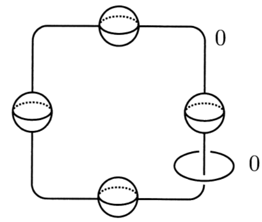


図 7　$T^2 \times S^2$ の Kirby 図式．

の線分を 1-ハンドルの $D^1 \times \partial D^2$ の部分に 4 本補うことにより，2-ハンドルの接着を表す単純閉曲線ができ上がる．

X の g 個の 1-ハンドルと g 個の 2-ハンドルの接着の仕方を上の方法で $\mathbb{R}^2$ 上に描いた図を，X の（あるいは M の）**Heegaard 図式**という．M の微分同相類は Heegaard 図式によってただ 1 つに定まる．例えば，図 5 の Heegaard 図式によって表される 3 次元閉多様体は，$(4,1)$ 型のレンズ空間 $L(4,1)$ である．図 4 左，図 4 右は Heegaard 図式ではないが，それぞれ $S^1 \times D^2$, $S^2 \times D^1$ を表している．

次元を 1 つ上げよう．4 次元多様体に対しても，Heegaard 図式の類似物を考えることができる．M を連結な 4 次元有向閉多様体とし，X を M のハンドル分解とする．ハンドルの消去を行うことにより，X の 0-ハンドルと 4-ハンドルはそれぞれ 1 つであるとしてよい．X の 3-ハンドル，4-ハンドルの接着の仕方は 1 通りであることが知られているので，0-ハンドル，1-ハンドル，2-ハンドルの接着の仕方を決めれば X の構造が定まる．先ほどと同様に，0-ハンドル D^4 の境界 $\partial D^4 = S^3$ から 1 点を除いたものを $\mathbb{R}^3$ と同一視し，$\mathbb{R}^3$ 内に 1-ハンドルの接着面 $\partial D^1 \times D^3$，2-ハンドルの接着面 $\partial D^2 \times D^2$ を描く．1-ハンドルの接着面は 2 つの D^3 であり，これらをある平面に関して対称な位置に描く（図 6 左）．2-ハンドルについては，接着面の中心線 $\partial D^2 \times \{0\}$ のみを $\mathbb{R}^3$ 内に描くのであるが，3 次元の場合と異なり，これだけでは接着の仕方が 1 通りに定まらない．これは，結び目の管状近傍の自明化の取り方が本質的に $\pi_1(O(2)) \cong \mathbb{Z}$ の分だけ存在するためであり，framing と呼ばれる整数を 1 つ指定することにより接着の仕方は 1 通りに定まる（図 6 右）．2-ハンドルの接着面が 1-ハンドルの $D^1 \times \partial D^3$ の部分にかかる場合は，Heegaard 図式の場合と同じように，1-ハンドルの接着面をつなぐように 2-ハンドルの接着面の中心線を描く．この場合にも framing を定義する方法があり，曲線に整数を添えることで 2-ハンドルの接着の仕方を完全に決定することができる[9]．

X の 1-ハンドルと 2-ハンドルの接着の仕方を上の方法で $\mathbb{R}^3$ 上に描いた図を，X の（あるいは M の）**Kirby 図式**という．M の微分同相類は Kirby 図式によってただ 1 つに定まる．例えば，図 7 は 4 次元閉多様体 $T^2 \times S^2$ の Kirby 図式である．左右と上下に置かれた D^3 の対は，D^3 の中心を結ぶ線分の垂直二等分面に関して対称である．

Heegaard 図式の場合と違い，X が閉多様体に微分同相でない場合も，上のような図を Kirby 図式と呼ぶ．例えば，図 6 左，図 6 右はそれぞれ $S^1 \times D^3$，カスプファイバーの近傍の Kirby 図式である．また，Kirby 図式はハンドル図式と呼ばれることもある．閉多様体の場合は，4 次元多様体の Heegaard 図式とも呼ばれる．そもそも Kirby 図

式という用語自体，S^3 内の絡み目に沿った Dehn 手術を表す図式を指す場合も多いので，注意が必要である．

以上により，Morse 関数から 3 次元，4 次元多様体の設計図とも言える，Heegaard 図式，Kirby 図式が得られた．多様体の次元が低い場合に，問題 3 に対する 1 つの解答が与えられたと言ってもよいであろう．

6. エキゾチックな 4 次元多様体

4 次元多様体を直接見ることは不可能であるが，Kirby 図式は 4 次元多様体を間接的に見ることを可能にしているとも言える．では，どのような多様体を見ることができるのであろうか．

2 つの多様体が同じであるという場合，通常は両者が微分同相という関係にあることを指す．これは，微分法を行うための仕組みの大域的なつながり具合が等しいということを意味する．一方，2 つの多様体が同相という関係にある場合に，両者を同じものとみなす考え方もある．これは，両者の間に両連続な一対一の対応が存在することである．互いに微分同相な 2 つの多様体は同相であるが，逆は必ずしも成立しない．互いに同相であるが微分同相ではない 2 つの多様体を，**エキゾチックな多様体のペア**という．

Kirby 図式を用いると，エキゾチックな 4 次元多様体のペアを見ることができる．図 8 の Kirby 図式によって表される 2 つの 4 次元多様体は，互いに同相であるが微分同相ではない．この例は，S. Akbulut と安井弘一氏によって構成された例であり，一方の多様体にコルクツイストと呼ばれる操作を施すことにより，他方の多様体が得られる[10]．図 8 において，整数の添えられた閉曲線は 2-ハンドルの接着面の中心線である．詳しくは述べないが，点の付いた円周は 1-ハンドルのベルト球面の「赤道」を描いたものである．この 1-ハンドルの図示法は，2 つの D^3 を描く図示法とは異なるが，相互に書き換えが可能である．また，n は 1 以上の整数，$n' = n + 1$ であり，整数 m の書かれた

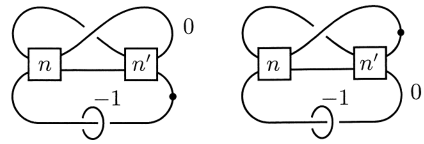


図 8 エキゾチックな 4 次元多様体．

四角の箱は，2 本のひもが互いの周りを $2\pi m$ だけ回転しながら絡むことを意味している．

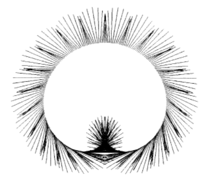
本稿では，有限次元多様体の Morse 理論とその低次元多様体への応用を述べた．詳しく解説することはできなかったが，Morse 理論ではベクトル場が非常に重要な役割を果たす．ところで，冒頭に登場した Maxwell は電磁気学を築いた人物であり，電磁気学と言えばベクトル場である．また，同じく冒頭で紹介した Cayley は 8 元数を考えた人物であるが，8 元数は 7 次元球面上のベクトル場の存在と密接に関係する．不思議なつながりを感じなくもない．

参考文献

1) 坪井俊，『ベクトル解析と幾何学』，講座・数学の考え方，朝倉書店，2002 年．
2) 古田幹雄，微分形式と Stokes の定理，「数理科学」，1995 年 12 月号，49–55（「数理科学」2008 年 4 月別冊「多様体の広がり」，16–23 に再録）．
3) 深谷賢治，『電磁場とベクトル解析』，岩波講座・現代数学への入門，岩波書店，1995 年．
4) 深谷賢治，ゲージ理論と幾何学（チャーン・サイモンズ場），「数理科学」，1996 年 3 月号，11–18（「数理科学」2002 年 4 月別冊「現代物理と現代幾何」，32–41 に再録）．
5) J.C. Maxwell, On Hills and Dales, *Philosophical Magazine* **40** (1870), 233–240.
6) A. Cayley, On Contour and Slope Lines, *Philosophical Magazine* **18** (1859), 264–268.
7) 松本幸夫，『Morse 理論の基礎』，岩波講座・現代数学の基礎，岩波書店，1997 年．
8) 田村一郎，『微分位相幾何学』，岩波書店，1992 年．
9) R.E. Gompf and A.I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.20, American Mathematical Society, 1999.
10) S. Akbulut and K. Yasui, Corks, Plugs and exotic structures, *Journal of Gökova Geometry Topology* **2** (2008), 40–82.

（えんどう・ひさあき，東京工業大学大学院理工学研究科）

ベクトル解析からシンプレクティック幾何へ



太田 啓史

1. ベクトル解析：寸止め

筆者は，学生時代「ベクトル解析」の講義を受けた記憶がない．物理の電磁気学の講義は受けていたので，ベクトル解析という単語に何となくのイメージをもっていたが，「ベクトル解析」とは果たして何を学ぶものなのか，目標は何かといわれると正直筆者には答えにくい．随分前のことだが，あるとき「ベクトル解析」という名の講義が筆者の勤める大学で新設され，困ったことに1番初めの担当者としてあてられたことがある．当時の教務委員の方に何を教えるべきか相談したところ，「自由にやってもらってよろしい」という予想通りの答えが返ってきた．学生のときに，買ってみたもののろくに読まずに持っていたニッカーソン・スペンサー・スティーンロッド著『現代ベクトル解析』(岩波書店，1965) や他のベクトル解析と名のつく本をいくつかぺらぺらめくってみたところで，やはり明確な目標が見えない．多変数微積分を，曲線や曲面など曲がったところでやることが主題のようであるが，曲線や曲面の法ベクトル方向には微分してはいけなくて，それをやると曲面論入門になってしまうようである．また，曲線，曲面も何となく「多様体」にまでつっこんではいけなくて，その手前で止める．どうも「**寸止め**」がベクトル解析の極意のようである．

また独特の記号法があるようである．伝統的なベクトル解析の本でよく出てくるものとして，次のベクトル値関数やスカラー（関数）がある．$\mathbf{R}^3$ 上の関数 $f(x_1,x_2,x_3)$ に対し，その**勾配ベクトル場** $\mathrm{grad}\ f$ は

$$\mathrm{grad}\ f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \tag{1}$$

で定義される．∇f と書かれる場合もある．また $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル値関数 $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ を

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,x_3)\\&=(P(x_1,x_2,x_3),Q(x_1,x_2,x_3),R(x_1,x_2,x_3))\end{aligned}$$

と書いたとき

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ F&=\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3},\\ \mathrm{rot}\ F&=\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3},\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1},\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\end{aligned}$$

をそれぞれ F の**発散** (divergence)，**回転** (rotation) という．$\mathrm{div}\ F$ はスカラー（関数）であり，$\mathrm{rot}\ F$ はベクトル値関数である．規則的ではあるがなかなか複雑な式で初めてみたときは，覚えないといけないものなのかと思って多少憂鬱になるのが普通であろう．ファインマンの『電磁気学』(岩波書店，1986) の25ページあたりをみるとこれら $\mathrm{grad},\mathrm{div},\mathrm{rot}$ の間に成り立つ関係式がいくつかあげられている．電磁気学の授業を受けていたときは一応これらの公式を覚えて期末試験に臨んだ記憶があるが，いまではさっぱり忘れている．例えば，

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ f=0, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ F=0 \tag{3}$$

などがある．後でみるように多様体の講義で習う微分形式を知っていればこれらの公式は覚える必要はない，というのは有名な話である．しかし，「ベクトル解析」の講義では普通は多様体や微分形式まで踏み込まないので，(2), (3) は，あれ，どの順番だっけ，とかいいながら覚えるのである．筆者が「ベクトル解析」の講義を初めて担当したときは自分がさっぱり忘れていることを学生の皆さんに覚えるようにとは言えないので，微分形式の話をして，「ほら微分形式を知っていれば電磁気学なんかで出てくる (2), (3) の式は覚えなくてもい

いでしょ」というオチにしたかったのであるが，聴講していた学生の半数がそもそもの電磁気学を学んでいなかったので，div や rot の記号をみるのも初めてという状況であった．そのため div や rot の定義をまずやって，それから (2), (3) を定義に従って計算して証明し，その後微分形式をやって，「ほら微分形式を知っていれば電磁気学なんかで出てくる (2), (3) の式は覚えなくてもいいでしょ」と自作自演をやったとき，ふとハブの養殖の話を思い出したのであった．

学生時代に東京有明埠頭から 50 数時間かけて沖縄に船旅をしたことがある．雑魚寝の 2 等船室にこれだけ長く乗っているとさすがに隣のおじさんと仲良くなったりする．彼は東京で借金を抱え夜逃げ同然で沖縄に向かうところで，沖縄に着いたらハブの養殖をやるのだ，というビジネスプランを得意満面に語ってくれた．沖縄ではハブの駆除を目的として，ハブを捕まえて役所にもっていくといくらかのお金がもらえたそうで，それならばと自分であらかじめハブを養殖しておいて，金が入り用になったら随時役所にもっていき安定的に生活費を稼ぐという算段だ[編注)]．

2. ベクトル解析：同一視

さて，ベクトル解析のもう一つの極意として，ベクトル場と微分形式の「**同一視**」をあげることができるだろう．同一視といってもいろいろな同一視の種類がある．例えば，先ほどから話題となっている

問題 1　等式 (2), (3) を微分形式を用いて示せ．

の証明のあらすじをみることでベクトル解析における同一視の例を具体的にみてみよう．ハブの養殖をしたくないので，ここではまず $\mathbf{R}^3$ 上の微分形式について簡単に説明する．といっても，結局多様体論をやるわけではないので，かなり形式的に導入する（おそらくこの辺りのことは，本号特集の中の小林治さんの記事に出てくると思われるので詳しくはそちらをご覧頂きたい）．

$\mathbf{R}^3$ 上の座標を $x = (x_1, x_2, x_3)$ とする．$\mathbf{R}^3$ 上の何回でも偏微分可能な（実数値）関数全体がなすベクトル空間を $C^\infty(\mathbf{R}^3)$ と書く．「記号」dx_1, dx_2, dx_3 を形式的に考え，$C^\infty(\mathbf{R}^3)$ の要素を係数とする dx_1, dx_2, dx_3 の線形結合の全体のなすベクトル空間を $\Omega^1(\mathbf{R}^3)$ と書いてこれを $\mathbf{R}^3$ 上の 1 次微分形式の空間という．すなわち，$f_i(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ に対し，

$$\Omega^1(\mathbf{R}^3) = \{f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3\}.$$

次に，dx_1, dx_2, dx_3 の間に**外積（ウエッジ積）**$\wedge$ という次の性質を満たす積構造を考える．

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \tag{4}$$

特に $dx_i \wedge dx_i = 0$ が成り立つ．$\mathbf{R}^3$ 上の 2 次微分形式とは $g_i(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ に対し，

$$g_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + g_2(x)dx_2 \wedge dx_3 + g_3(x)dx_3 \wedge dx_1$$

なるものをいい，その全体のなすベクトル空間を $\Omega^2(\mathbf{R}^3)$ と書く．同様に $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ に対し，

$$\Omega^3(\mathbf{R}^3) = \{h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\}$$

を 3 次微分形式の空間という．3 次元だけでなく一般の n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の場合には $dx_1, \ldots, dx_n$ の中から k 個選んで

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

を基底として $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ の要素を係数とする線形結合を考えることができ，それを $\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式という（性質 (4) に注意すると，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ となるようにとることもできる）．$k = 0$ のときは $\Omega^0(\mathbf{R}^n) = C^\infty(\mathbf{R}^n)$ に他ならない．特に 3 次元空間の場合は，先に定義した 0，1，2，3 次微分形式の 4 種のみである．

次に微分形式の**外微分**と呼ばれる微分する写像

$$d : \Omega^k(\mathbf{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbf{R}^n)$$

を，まず関数 $(k = 0)$ の場合には，$f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n) = \Omega^0(\mathbf{R}^n)$ に対し，

$$df := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j$$

と定義し，1 次微分形式 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)dx_i$ に対しては

$$d\alpha := \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

と定義し，一般の k 次微分形式に対しても同様に定義される．このとき

$$d^2 = 0 \tag{5}$$

編集部注）もちろんこれは犯罪行為です．

が成り立つことがわかる．ここでは天下り式に外微分の定義を与えてしまった．初めて見た人はなぜこのようなものを考えるのか不思議に思うであろう．実際，一つのユークリッド空間だけを考えていてはなぜ外微分を考えるのかその必然性が見えてこない．これは，

> **問題 2**　座標変換で変わらない「微分」の概念を定式化せよ．

という問題を考えて初めて納得できることであるが，ベクトル解析の授業では「座標変換」の考え方が表立って現れず，やはり「多様体」の考え方が必要となってくる．多分，本号のどこかの記事で書かれていると思うので詳しくはそちらをご覧頂きたい．

しかし，ここに必要なことの一つとして**「双対空間」**の概念があることに触れておきたい．ベクトル空間 V の双対空間 V^* とは V から V の基礎体 K への線形写像全体のなすベクトル空間のことである．例えば V が $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間ならば，その双対空間 V^* も $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間になる．通常線形代数の授業でこのように抽象的に導入されることが多いが，双対空間を考える必然性はなかなか線形代数の授業の中では教えられない．双対空間の必要性のもっともわかりやすい例が，先に述べた外微分すなわち座標変換で変わらない「微分」の概念を定式化する際に現れる．すなわち座標変換で変わらない「微分」の概念をベクトル場に対して定義することはできず，その双対である「微分形式」に対して外微分を考える必然性が生まれてくるのである．

ここで，もとの空間とその双対空間は抽象的にベクトル空間として同型であっても，同型対応は標準的なものがあるわけではないことに注意する．同型対応を与えるために，何か付加的な情報を手で入れてやる必要がある．例えば基底を一つ選ぶとその双対基底が定まりそれによって同型対応が決まる．ベクトル場の基底として $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ を選んだとき，その双対基底が 1 次微分形式で用いられる「記号」$dx_1, \ldots, dx_n$ の正体である（$\frac{\partial}{\partial x_i}$ は x_i 方向への微分という幾何学的な意味をもっている．dx_i は座標関数 x_i を外微分した 1 次微分形式に他ならない）．また，同型写像を与えるのに「計量」もよく使われる．3 次元ユークリッド空間内ではそのユークリッド計量を用いるのが普通である．ベクトル解析では，暗黙のうちにこのユークリッド計量を用いてベクトル場とその双対概念である微分形式がしばしば同一視される．例えば，(1) で定義された勾配ベクトル場 grad f はベクトル場であるが，外微分と計量を用いて次の等式を満たすベクトル場として定義される．

$$g(\mathrm{grad}\ f, X) = df(X). \tag{6}$$

ここで g は計量を表し，X は任意のベクトル場である．右辺において 1 次微分形式 df はベクトル場の双対なので，ベクトル場 X を df に代入することができ，その結果上の式は関数としての等式となる．一般に $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場

$$X = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

に対して $\mathbf{R}^3$ のユークリッド計量を用いて 1 次の微分形式と同一視したものを X^* と書くと

$$X^* = X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3$$

で与えられる．(6) 式のメリットは grad f が座標の取り方によらない（しかし計量の取り方には依存する）定義になっている点であり，これはそのまま多様体上の勾配ベクトル場の定義になる．

もう一つ，ベクトル解析で暗黙のうちに用いられる「同一視」に $*$ **作用素**がある．これは $\mathbf{R}^3$ 上の k 次微分形式を $3-k$ 次微分形式に写す線形写像であり，具体的には

$$\begin{aligned}
&\Omega^0(\mathbf{R}^3) \ni f \mapsto *f := f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^3(\mathbf{R}^3),\\
&\Omega^1(\mathbf{R}^3) \ni \alpha = \sum \alpha_i dx_i \mapsto *\alpha \in \Omega^2(\mathbf{R}^3),\\
&\Omega^2(\mathbf{R}^3) \ni \beta = \sum \beta_{ij} dx_i \wedge dx_j \mapsto *\beta \in \Omega^1(\mathbf{R}^3),\\
&\Omega^3(\mathbf{R}^3) \ni f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \mapsto f \in \Omega^0(\mathbf{R}^3)
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
*\,\alpha &= \alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2,\\
*\,\beta &= \beta_{12}dx_3 + \beta_{23}dx_1 + \beta_{31}dx_2
\end{aligned}$$

である．(4) に注意して少し計算すると，任意の $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^3)$ に対し $*^2\omega = (-1)^{k(3-k)}\omega = \omega$ が成り立つことがわかるので，任意の k に対し $*^2$ は恒等写像となる．以上の，ベクトル場と 1 次微分形式の同一視と，$*$ 作用素でうつり合う微分形式を同一視することが $\mathbf{R}^3$ におけるベクトル解析ではしばしば行なわれる．実際，これらを使うと

$$\begin{aligned}
df &= (\mathrm{grad}\ f)^*,\\
*\,dX^* &= (\mathrm{rot}\ X)^*,
\end{aligned}$$

$$*d*X^* = \mathrm{div}\ X$$

と書ける．すると (2) は

$$(\mathrm{rot\ grad}\ f)^* = *d(\mathrm{grad}\ f)^* = *ddf = 0$$

となり，外微分 d の性質 (5) を関数の場合に適応したものとなっていることがわかる．同様に (3) は 1 次の微分形式に対して (5) を書いたものに他ならないことがわかる．というわけで公式 (2), (3) は $d^2 = 0$ に集約されることがいくつかの同一視を経て理解できた．

以上をまとめると次のように言えるだろう．「3 次元空間内のベクトル解析では，積極的に接ベクトル場と微分 1 形式を同一視して理論を構築することもできた．しかし，常微分方程式論的な性質は接ベクトル場の性質だけからわかることであり，幾何学的積分法であるストークスの定理は，微分形式としての性質だけからわかることである．こうして，多様体論は接ベクトル場と微分 1 形式の区別をしたことにより，それぞれの理論を独立させ，理論の成立の条件を明らかにした．さらに，多様体の上に，リーマン計量の概念を定義し，道のりから定義される距離を持つ幾何学を多様体上の構造として理解できるようにした．」(「はじめに」坪井俊著『幾何学I　多様体入門』(東京大学出版会，2005) より)．ここで接ベクトル場とあるのは本稿で単にベクトル場と呼んでいるものである．リーマン計量を主役にした幾何学が**リーマン幾何学**でありそれについては本特集の山口孝男さんの記事で詳しく述べられると思う．

さて，リーマン計量以外に別の同一視の仕方はあるだろうか．あればそれを主役とした幾何学はどういうものだろうか．その一つが後半の主題である**シンプレクティック幾何学**である．「同一視」の仕方が違うと話が全く変わる．例えば，勾配ベクトル場と関数の微分は (1) により計量を通じて同一視されたが，計量の代わりに**シンプレクティック形式**で関数の微分をベクトル場と同一視すると，**ハミルトンベクトル場**となる．このとき，勾配ベクトル場とハミルトンベクトル場は計量に関して直交関係にある．

3. シンプレクティック幾何へ

シンプレクティック幾何の起源は解析力学である．ニュートンの古典力学によると，n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の質量 m の質点の運動方程式は $q(t)$ を時

刻 t における位置，F を力とすると

$$F = m\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

で与えられる（以下簡単のため $m=1$ とする）．これは単独 2 階常微分方程式であるがこれを次の 1 階連立常微分方程式に書き換えることができる．

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = p(t), \\ \dfrac{dp(t)}{dt} = F. \end{cases} \tag{7}$$

$p(t)$ は運動量である．さらに位置エネルギーが（ポテンシャル）関数 U で与えられていると

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

であり，運動エネルギーと位置エネルギーを合わせた全エネルギーを H（ハミルトニアン）と書くと

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + U = p^2 + U$$

となり，運動方程式 (7) は次のように書ける．

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dfrac{dp(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}. \end{cases} \tag{8}$$

これは通常，**ハミルトン方程式**と呼ばれる連立常微分方程式である．例えば，$n=1$ とし，$U = \frac{q^2}{2}$ のとき $H = \frac{p^2+q^2}{2}$ で調和振動子の運動方程式を与える．H を与える毎に力学系が一つ与えられ，それに対するハミルトン方程式 (8) の解 $(q(t), p(t))$ がその運動を記述している．よって，関数 $H(q,p) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が与えられたとき，ハミルトン方程式 (8) を解くことが問題となる．以上は数学的には純粋に常微分方程式の問題であり微分形式は今のところ出てこない．

方程式を解く際の常套手段は「変数変換」をうまく行なって方程式をなるべく易しいものにすることである．ただし，「変数変換」においてどんな変換も許されるわけではなく，方程式の解の情報を失ってはいけない．もう少し詳しくいうと，方程式 (8) の解 $(q(t), p(t))$ は関数 H に付随して (8) の右辺

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)$$

で定まるベクトル場に沿う積分曲線に他ならないので，変数変換は微分同相写像

$$\Psi : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$$

であって，ベクトル場 X_H を保つものということになる．ここで強調したいことは，変数変換は q, p それぞれに対して行なわれるのではなく，「対等に」混ぜて変換することを許していることである．ベクトル場 X_H を関数 H の**ハミルトンベクトル場**という．ハミルトンベクトル場 X_H は H の勾配ベクトル場

$$\mathrm{grad}\ H = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)$$

とは似て非なるものである．実際，2 つのベクトルのユークリッド内積を計算するとゼロになるので **X_H と grad H は直交している**ことがわかる．ハミルトンベクトル場と勾配ベクトル場とは幾何学的に大きな違いがある．例えば $H = \frac{p^2+q^2}{2}$ すなわち単振動の場合，H の勾配ベクトル場 (q, p) は原点から放射状に出ているが，ハミルトンベクトル場 $(p, -q)$ は原点の周りを渦のように回っている．それらの積分曲線を考えると勾配ベクトル場の場合は放射直線状にのびていくので**周期解は存在しない**のに対し，ハミルトンベクトル場の積分曲線は原点中心の同心円となり**周期解が存在する**．実際その周期解が単「振動」を記述している．このようにハミルトン方程式の解は周期解をもつことが多く，周期解の存在を研究することは，惑星運動の解析など古典的かつ基本的な問題となる．ハミルトン方程式の周期解の存在問題は**アーノルド予想**とよばれる予想に定式化されシンプレクティック幾何学を発展させる上で大きな原動力となった[3]．

さて，勾配ベクトル場は (6) により H の外微分 dH を計量で同一視したものであったが，(6) に対応する式としてハミルトンベクトル場 X_H と dH の間には次の関係式がある．

$$\omega(X_H, X) = dH(X). \tag{9}$$

X は任意のベクトル場である．ω は**シンプレクティック形式**と呼ばれ，ここでは $\mathbf{R}^{2n}$ の座標 (q, p) を用いて

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \tag{10}$$

で定義される 2 次微分形式である*1)．実際，ハミルトンベクトル場

*1) $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ とする流儀もある．また，(9) で右辺を $-dH$ にする流儀などもあって本によって符号が微妙に違う．

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

が (9) を満たすことは簡単な計算でチェックできる．(6) において計量が果たしていた役割を (9) ではシンプレクティック形式が担っている．すなわち H の微分を計量でなくシンプレクティック形式で「同一視」したものがハミルトンベクトル場である．

以上からハミルトン方程式 (8) を変数変換する際の条件としては，（外微分 dH は座標不変なので）シンプレクティック形式 ω を不変にしなければならないことがわかった．この性質を満たす変換 Ψ を**正準変換**という．リーマン計量を不変にする変換を等長変換というが，等長変換で不変な性質を調べるのがリーマン幾何学であるのに対し，正準変換で不変な性質を調べるのがシンプレクティック幾何学である．

もとの問題に戻ると，ハミルトン方程式 (8) の変数変換として許されるのは正準変換であることがわかったが，では，ハミルトニアン H が与えられたとき，どうやって適当な正準変換をみつけて方程式を解き易いものに変換するのか，また変換したものを実際に解くにはどうすればよいか，が次なる問題となる．その一つに**ハミルトン・ヤコビの方法**というものがある．詳しくは例えば，アーノルドの古典的名著[1]の第 9 章をご覧頂きたい．

以上，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の質点の運動を記述するために $\mathbf{R}^{2n}$ 上でハミルトン方程式を考えシンプレクティック形式を導入したが，これは直ちに多様体 X 内の質点の運動を記述する場合に一般化される．このときハミルトン方程式は X の余接束 T^*X 上で立てられる．実際 T^*X 上には標準的なシンプレクティック形式（局所的には $\sum dq_i \wedge dp_i$ で与えられる．ここで q は多様体 X の局所座標で p は T^*X のファイバー座標である）が存在する．

さらに，一般に偶数次元の多様体 X 上のシンプレクティック構造とは X 上の非退化な閉 2 次微分形式 ω のことを意味する．非退化性は，例えば (9) 式において右辺からハミルトンベクトル場 X_H が一意に決まることを保証する．また閉形式であるとは $d\omega = 0$ を満たすことをいう．もし，多様体 X がシンプレクティック構造をもてば，そのシンプレクティック形式は局所的にはいつでも $\sum dq_i \wedge dp_i$ の形をしていることが知られている（**ダルブーの定理**）．すなわち，ダルブーの定理は，シンプレクティック幾何学では局所的にはみな同じであり局所的なシンプレクティック不変量は存在しないことを意味する．大域的な構造こそ重要となる．一方において，リーマン幾何学ではリーマン計量に対してリーマン曲率という概念が定義され，これはリーマン幾何学においてたいへん重要な局所不変量となる．

シンプレクティック幾何学においてその大域的性質の研究に大きなブレイクスルーを与えたのは，1980 年代初頭グロモフ（Gromov）による**擬正則曲線の理論**[3]といってよいであろう．例えば，グロモフは次のような定理を擬正則曲線の理論を使って証明した[3]．

> **定理 1**（非圧縮性定理）　$B(R) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 < R^2\}, Z(r) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ としたとき，もし $r < R$ ならば，$B(R)$ を $Z(r)$ にシンプレクティック構造を保つ写像（正準変換）で埋め込むことはできない．

位相的に $B(R)$ を $Z(r)$ に埋め込むことは簡単にできるし，また体積を保つ写像で埋め込むことも（$(x_3, \ldots, x_{2n})$ 方向に引きのばせば）容易にできる．ところが，定理ではシンプレクティック構造を保ったままでは埋め込む（圧縮する）ことはできない，と主張している．$r < R$ ならば (x_1, x_2) 方向に注目すると，$B(R)$ を $Z(r)$ に埋め込むことの障害がみえるというわけである．これは，シンプレクティック形式が「2」次の微分形式であり，何らかの 2 次元的な広がりをもった構造をキープしていることの現れであると解釈される．その意味で，リーマン幾何学は「長さ」の幾何学であるのに対し，シンプレクティック幾何学は「膜」の幾何学といってよいだろう．

4. おわりに

ベクトル解析がもつ「寸止め」の側面は，とりもなおさず次への橋渡し，動機付けということである．本特集をご覧になれば，読者の方々はいろいろと広がっていく世界を垣間みることができるのであろう．ここでは，その一つとしてシンプレクティック幾何への繋がりについて，後半かなり駆け足になりながら，述べた．先に引用した文章では「常微分方程式論的な性質は接ベクトル場の性質だけからわかる」とあった．確かに力学的な側面は接ベクトル場の言葉で記述されることが多いが，シンプレクティック幾何学は常微分方程式の問題からスタートするもののその背後に支配す

る構造は微分形式であることを少しでも感じて頂ければ幸いです．

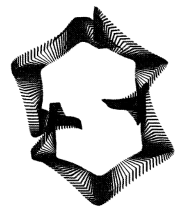
というわけでこの原稿自体「寸止め」になってしまったようです．さらに興味をもたれた方は以下の参考書をお読みになることをお薦めいたします．

参考文献

1) アーノルド：『古典力学の数学的方法』, 岩波書店（1980）．
2) 深谷賢治：『解析力学と微分形式』, 岩波書店（1996）．
3) 深谷賢治：『シンプレクティック幾何学』, 岩波書店（2008）．
4) 数理科学「現代幾何と方程式」, No.564, 2010 年 6 月号．

（おおた・ひろし，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

ベクトル解析からリーマン幾何へ



山口　孝男

1. はじめに

ベクトル解析の起源は微分積分学の基本定理であり，幾何学や解析学をはじめ数学の根底を支える役割をもっている．本稿では，リーマン幾何においてベクトル解析が果たす役割について，ラプラシアンをキーワードの一つとして述べることにする．初学者の道標としての役割を幾分なりとも果たすことができれば幸いである．

2. リーマン多様体に対するベクトル解析の公式

学部の2年生くらいのときに習うベクトル解析では，ユークリッド空間における領域や曲面上で，発散定理，グリーンの定理，或いはより一般のストークスの定理などが出てくる．これらの積分公式はリーマン多様体上に自然に拡張される．まず初めにこれを定式化しておこう．

多様体 M 上のリーマン計量 $g = \langle\,,\,\rangle$ は，M の各接空間上に内積を定め，局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いて $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^i dx^j$ と表される．リーマン多様体とはリーマン計量が与えられた多様体のことであり，曲がった空間とも呼ばれる．

M 上の滑らかな関数 f の**勾配**ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ が，条件

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \xi f$$

により，一意的に定まる．局所座標を用いれば

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_j f \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

と表示される．ここで (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列を表す．$\operatorname{grad} f$ は，関数 f が最も大きく変化する方向とそのときの f の変化率を与える．

ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ の**発散** $\operatorname{div} X$ が，

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(X^i\sqrt{g})$$

により定まる．ここで $g = \det(g_{ij})$．また関数 f の**ラプラシアン**が

$$\Delta f = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j f)$$

で定義される．

以上の準備の下で発散定理とグリーンの定理を述べる．M をコンパクトなリーマン多様体とする．また M は境界を持つ場合も想定しておく．これは定理の意味を理解するためにも役立つ．dV, dA はそれぞれ $M, \partial M$ の体積要素と面積要素で，積分するときの元になる測度を表す．また，ν は ∂M 上の外向き単位法ベクトルを表す．

定理 2.1（発散定理）

$$\int_M \operatorname{div} X\, dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\, dA.$$

特に M が境界を持たないとき，$\int_M \operatorname{div} X\, dV = 0$, $\int_M \Delta f\, dV = 0$ が成り立つ．

X を空間 M 内を流れる流体の速度ベクトル場とみなすとき，各点の周りの微小領域に発散定理

を適用することにより，X の発散は，各点の周りから単位時間内に湧出する流体の量の大きさを表していることが分かる．

以後，慣例に従い $\nabla f = \operatorname{grad} f$ と書く．

定理 2.2（グリーンの公式）

$$\int_M f\Delta h - \langle \nabla f, \nabla h\rangle \, dV = \int_{\partial M} f(\nu h)\, dA.$$

特に M が境界を持たないとき，$\int_M f\Delta h\, dV = \int_M \langle \nabla f, \nabla h\rangle \, dV$．

グリーンの公式は微積分の部分積分の対応物と見なせる．

これらの積分公式はリーマン多様体上で微積分学（解析学）を展開するとき土台になるものである．以下，本稿ではリーマン多様体上の関数や微分形式に作用するラプラシアン，曲率と多様体の大域構造との関連を軸にして，リーマン幾何においてベクトル解析が果たす役割に焦点を当てたい．

3. 関数のラプラシアンとリーマン幾何

リーマン計量 g からレビ・チビタ接続 ∇ が定まる．これを用いるとベクトル場 X のベクトル場 Y 方向の共変微分 $\nabla_Y X$ などの微分演算が自然な形で定まる．次にベクトル場を 2 回共変微分するとき，微分の順序を入れ替えたとき，その差として曲率テンソル R が定義される：

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

R がテンソルと呼ばれるのは，ベクトル場 $R(X,Y)Z$ の点 p におけるベクトルが，ベクトル場 X, Y, Z の p における値（ベクトル）にしか依存しないからである．またリッチ・テンソル Ric が曲率テンソルのトレースをとって平均することにより

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)Y, E_i\rangle$$

により定まる．ここで E_i は局所的に定義された M の正規直交フレームを表す．M のすべての単位接ベクトル X に対して，$\operatorname{Ric}(X,X) \geq \kappa$ であるとき，M の**リッチ曲率**は κ 以上であるという．また接空間の 2 次元部分空間 π 方向の断面曲率 $K(\pi)$ が $K(\pi) = \langle R(u,v)v, u\rangle$，により定まる．ここで $\{u,v\}$ は π の正規直交基底である．$\operatorname{Ric}(X,X)$ は，X を含む $n-1$ 個の互いに直交する 2 次元部分空間 $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ 方向の断面曲率の和に等しい：

$$\operatorname{Ric}(X,X) = \sum_{i=1}^{n-1} K(\pi_i).$$

リーマン幾何においては，曲率を通して多様体の大域構造を調べることが重要な問題である．

以下本稿では境界をもたないコンパクトなリーマン多様体 M を考える．M の滑らかな関数に作用するラプラシアン Δ の固有値を考察する．非自明な関数 f に対して，$\Delta f = \lambda f$ を満たす λ を Δ の**固有値**と呼ぶ．Δ の固有値は重複度も込めて可算個で一列に並べるとき，

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty$$

となることが知られている．空間 M を太鼓だと思うとき，固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ は太鼓を鳴らしたときの振動数に相当する．

S^2 を $\mathbf{R}^3$ における単位球面とする．$\mathbf{R}^3$ と S^2 の標準計量 g, h のラプラシアンの関係を導くため，(r, θ_1, θ_2) を $\mathbf{R}^3$ の極座標をする．$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$，$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$，$i = 1, 2$，とおくと，$g_{rr} = 1$，$g_{ri} = 0, g_{ij} = r^2 h_{ij}$ なので，Δ の定義に従い計算すると，

$$\Delta_{\mathbf{R}^3} F|_{S^2} = \Delta_{S^2} f - (\partial_r^2 F + 2\partial_r F)|_{S^2}$$

が出る．ここで $f = F|_{S^2}$．F を $\mathbf{R}^3$ の線形関数 $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} c_i x^i$ とすると，$\partial_r F|_{S^2} = f$ なので $0 = \Delta_{S^2} f - 2f$ となり 2 は S^2 の固有値を与える．実は $\lambda_1(S^2) = 2$ で，その固有関数はすべてこのようなものである（従って固有値 2 の重複度は 3）．一般に n 次元単位球面の第 1 固有値は n に等しい（重複度は $n+1$）．

次の問題は大変興味深い．

問題 3.1（順問題） M の幾何学が Δ の固有値にどのように反映するか調べよ．

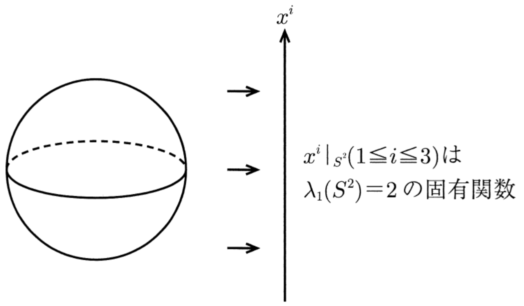


図1

> **問題 3.2**（**逆問題**）　Δ の固有値が M の幾何学にどのように反映するか調べよ．

これらの問題に関連して，第1固有値 λ_1 とリッチ曲率に関して次のリッヒネロビッチ・小畠の定理が知られている．

> **定理 3.1**　M が n 次元で，リッチ曲率が $(n-1)$ 以上であるとき，
> (1) $\lambda_1 \geq n$（リッヒネロビッチ）．
> (2) $\lambda_1 = n$ は，M が単位球面 S^n に等長的である場合に限る（小畠）．

この定理の証明では，次の**ボッホナー・ワイツェンベックの公式**が鍵となる：

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\mathrm{Hess}\, f|^2 - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

ここで，関数 f のヘッシアン $\mathrm{Hess}\, f$ は，$\mathrm{Hess}\,(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f$ で定まる接空間上の2次形式であり，接空間上の線形変換 $X \to \nabla_X(\nabla f))$ と見なすこともできる．$-\mathrm{Hess}\, f$ のトレースがラプラシアン Δf に一致する．

上のボッホナー・ワイツェンベックの公式の証明では，左辺のラプラシアンの計算で微分の順序を入れ替えるときに右辺のリッチ曲率の項が現れる．ボッホナー・ワイツェンベック型の公式は幾何学の種々の局面で重要な役割を果たしているが，すべてこのような考え方に基づいて示される．

この公式を M 上で積分して発散定理を用いると，

$$0 = \int_M |\mathrm{Hess}\, f|^2 - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\, dV.$$

コーシー・シュワルツの不等式から，$|\mathrm{Hess}\, f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}$ が成り立つので，f として第1固有関数（$\Delta f = \lambda_1 f$）を取ると，

$$0 \geq \int_M \frac{\lambda_1 \Delta f \cdot f}{n} - \lambda_1 |\nabla f|^2 + (n-1)|\nabla f|^2\, dV.$$

ここでグリーンの公式から上式右辺の第1項は $\int_M \frac{\lambda_1 |\nabla f|^2}{n}$ に等しいので，

$$0 \geq \int_M (n-1)\left(-\frac{\lambda_1}{n} + 1\right)|\nabla f|^2\, dV$$

となり，$\lambda_1 \geq n$ が従う．

$\lambda_1 = n$ の場合は，第1固有関数が満たす微分方程式とリッチ曲率の条件から空間 M が強い制約を受け，単位球面に等長的になることが従う．

4. ド・ラムの定理とホッジの定理

M の p 次微分形式 ω は局所座標により

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と表される．M の p 次微分形式全体を $\Omega^p(M)$ で表す．このとき，外微分作用素 $d_p : \Omega^p \to \Omega_{p+1}$ が

$$d_p \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} d\omega_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

により定まる．$d_{p+1} \circ d_p = 0$ が成り立ち，その結果，M の p 次**ド・ラム コホモロジー群**が商ベクトル空間を用いて

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d_p \omega = 0\} / \{d_{p-1}\omega \mid \omega \in \Omega_{p-1}(M)\}$$

により定まる．定義からド・ラム コホモロジー群は微分位相不変量である．

> **定理 4.1**（**ド・ラムの定理**）　M の p 次ド・ラム コホモロジー群 $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ は，p 次特異コホモロジー群 $H^p(M, \mathbf{R})$ に同型である．

この定理から，特に p 次ド・ラム コホモロジー群の次元は有限であり p 次ベッチ数 $b_p(M)$ と呼ばれるホモトピー不変量に一致することが分かる．

ド・ラムの定理の証明の根底には，滑らかな多

様体上のベクトル解析の公式の一般的な形であるストークスの定理がある．

次にホッジの定理について述べる．

M を向きつけられたコンパクト・リーマン多様体とする．$\Lambda^p(T_x^*(M))$ は余接空間 $T_x^*(M)$ 上の p 次外積空間を表す．M 上の p 次微分形式 ω は，M の各点 x で $\Lambda^p(T_x^*(M))$ の元になっている．$\langle v_1\wedge\cdots\wedge v_p, w_1\wedge\cdots\wedge w_p\rangle = \det(\langle v_i, w_j\rangle)$ により，$\Lambda^p(T_x^*(M))$ に内積を入れ，$\Omega^p(M)$ 上の内積を

$$(\alpha,\beta)=\int_M \langle\alpha,\beta\rangle\, dV$$

により定める．$\delta:\Omega^p(M)\to\Omega^{p-1}$ を外微分作用素 $d:\Omega^{p-1}(M)\to\Omega^p$ の形式的随伴作用素として，$(\alpha,\delta\beta)=(d\alpha,\beta)$ により定義する．

p 次微分形式に作用する**ラプラシアン**が $\Delta = d\delta+\delta d:\Omega^p(M)\to\Omega^p(M)$ により定まる．p 次微分形式 ω が**調和**であるとは $\Delta\omega=0$ の場合をいう．ここで，

$$(\Delta\omega,\omega)=(d\omega,d\omega)+(\delta\omega,\delta\omega)$$

が成り立つので，ω が調和であるためには，$d\omega=0$，$\delta\omega=0$ が必要十分である．

定理 4.2（ホッジの定理）　任意の p 次ド・ラムコホモロジー類は唯一の調和形式を含む．

M の p 次調和形式全体を $\mathcal{H}^p(M)$ で表す．ホッジの定理より，自然な準同型 $\mathcal{H}^p(M)\to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ は同型である．ド・ラムの定理と合わせると，

$$\mathcal{H}^p(M)\ \text{の次元} = b_p(M)$$

が成り立つ．この式の左辺はリーマン不変量で右辺は位相不変量であり驚異的である．

例として平坦トーラス $T^n=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ において，p 次微分形式

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

を考察すると，dx^i はすべて平行になるので，

$$\Delta\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\Delta(\omega_{i_1\cdots i_p})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

が得られ，ω が調和であるのはすべての $\omega_{i_1\cdots i_p}$ が調和関数である場合に限る．T^n がコンパクトだから $\omega_{i_1\cdots i_p}$ が定数の場合である．従って，$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\mid 1\le i_1,\cdots,i_p\le n\}$ が $\mathcal{H}^p(T^n)$ の基底となり，次が成り立つ：

$$\dim\mathcal{H}^p(T^n)={}_n\mathrm{C}_p=b_p(T^n).$$

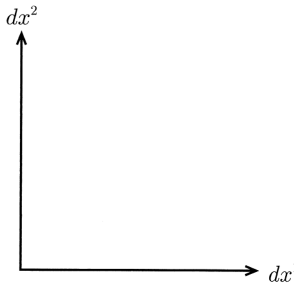


図 2　$\mathcal{H}^1(T^2)$ の基底．

5. 調和 1 形式とリッチ曲率

前節のホッジの定理を利用して，リッチ曲率と多様体の大域構造に関する次の結果を紹介する．

定理 5.1（ボッホナー・矢野）　n 次元コンパクト・リーマン多様体のリッチ曲率が 0 以上であるとき，
(1) M の 1 次ベッチ数 $b_1(M)$ は n 以下である．
(2) M のある点でリッチ曲率が正ならば $b_1(M)=0$．
(3) $b_1(M)=n$ は，M が平坦トーラスに等長的であるときに限り成り立つ．

ω を M の 1 次調和形式とするとき，ボッホナー・ワイツェンベックの公式は次の形になる：

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\omega|^2)=|\nabla\omega|^2+\mathrm{Ric}(\sharp\omega,\sharp\omega).$$

ここで $\sharp\omega$ は，ω に対応するベクトル場（$\langle\sharp\omega,\cdot\rangle=\omega(\cdot)$）を表す．この公式は，$d\omega=0$ なのでポアンカレの補題を用いて局所的に $\omega=df$ と表すと，ω が調和形式だから f が調和関数になり，3 節のボッホナー・ワイツェンベックの公式から直ちに従う．

上の公式を M 上で積分すると，発散定理から次を得る：

$$0 = \int_M |\nabla\omega|^2 + \mathrm{Ric}(\sharp\omega, \sharp\omega)\, dV$$
$$\geq \int_M |\nabla\omega|^2 dV \geq 0.$$

これより $\nabla\omega = 0$, $\mathrm{Ric}(\sharp\omega, \sharp\omega) = 0$ となり，M 上の調和 1 形式はすべて平行になり，$b_1 = b_1(M) \leq n$ が従う．また M のリッチ曲率がある点で正ならば $\omega = 0$，すなわち $b_1 = \dim \mathcal{H}^1(M) = 0$ も従う．

$b_1 = n$ のとき，調和 1 形式 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ で 1 次独立なものを選ぶ．これらは M の各点で 1 次独立な平行ベクトル場なので，M は平坦になる．いま

$$f(x) = \left(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \ldots, \int_{x_0}^{x} \omega_n\right)$$

で定義されるアルバネーズ写像 $f : M \to T^n$ を考察する．ここでトーラス T^n を

$$T^n = \frac{\mathbf{R}^n}{\{(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_n) \mid \alpha \in H_1(M, \mathbf{Z})\}}$$

と同一視している．f の微分のランクが M の各点で n であるので，M がトーラスに微分同相となり，M が平坦トーラスに等長的であることが従う．

6. 振り返って

以上述べたことから，ド・ラムの定理やホッジの定理に代表されるように，ベクトル解析は，位相幾何学と微分幾何学を結びつけ融合させる力を秘めている．実際我々はリーマン幾何において，ボッホナー・ワイツェンベックの公式を通して曲率やラプラシアンの固有値などが多様体の大域構造に密接に関わる様を見てきた．それらの根底にはベクトル解析における積分公式があった．

7. その後のこと

私が院生だった頃，グロモフのグリーン・ブック[7]が出て，リーマン多様体のハウスドルフ収束の話が盛んになりかけていた．そのグリーン・ブックに，ボッホナー・矢野の定理 5.1 の拡張が述べられていた．内容はリッチ曲率の下限はちょっとだけ負でも成り立つというもので，正確に述べると

定理 7.1[7]　十分小なる $\varepsilon_n > 0$ に対してリッチ曲率と直径 $d(M)$ が，$\mathrm{Ric} \cdot d(M)^2 > -\varepsilon_n$ を満たすならば $b_1 \leq n$ が成り立つ．

というものだった．その頃ベルジェが来日して大阪や東京で連続講義をしてこの結果（Gallot による解析的な証明も含む）の紹介をしていた[6]．グリーン・ブックの中では，ボッホナー・矢野の定理 5.1(3) の部分の拡張に関して次のトーラス予想が立てられていた：

予想 7.1[7]　$\mathrm{Ric} \cdot d(M)^2 > -\varepsilon_n$ かつ $b_1 = n$ ならば M はトーラスに同相である．

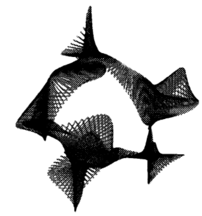
当時この予想はとても美しいと思い，頑張って解こうと思ったが歯が立たなかった．それから数年して，それまで断面曲率が一様に有界な枠内で深谷賢治さんやチーガー・グロモフらが展開していたリーマン多様体の崩壊理論のある部分を，断面曲率が下からのみ一様に有界な枠に拡げることができた．それで改めて上のトーラス予想を考えたところリッチ曲率の代わりに断面曲率を考えるとうまく証明することができた．その後リーマン多様体の収束・崩壊理論は，チーガー・コールディングにより，リッチ曲率の下限のみ一様に有界な枠に拡げられ，トーラス予想もコールディングによって証明された．

参考文献

1) J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer–Verlag, 1995.
2) 加須栄篤，『リーマン幾何学』，数学レクチャーノート 基礎編 2，培風館，2001 年．
3) 森田茂之，『微分形式の幾何学 1，2』，岩波講座 現代数学の基礎，岩波書店，1997 年．
4) I.M. シンガー/J.A. ソープ，『トポロジーと幾何学入門』，松江広文/一楽重雄共訳，培風館，1976 年．
5) F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM 94, Springer–Verlag, 1983.
6) M. Berger,「リッチ曲率と位相」，辻下徹記，大阪大学理学部数学教室，1982 年．
7) M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

（やまぐち・たかお，京都大学大学院理学研究科）

電磁気学，流体力学とベクトル解析



細 野 忍

1. はじめに

これまでに，線積分や面積分，ガウスの定理やストークスの定理がベクトル解析という数学的枠組みをなし，さらに多様体の幾何学へと拡がりをもつ様子が解説された．実は，ベクトル解析は物理法則を表現する手法としてその歴史的起源を持ち，現在においても物理学・工学において欠かせない道具となっている．ここでは，その様子を演習形式で垣間見ることにしよう．

2. 電磁気学の基礎方程式

電磁気学の歴史は比較的新しく 19 世紀半ばになってマクスウェルによってその基礎方程式系が書き表されたのであった．この方程式系は積分表示と微分表示の 2 通りが可能であるが，中学・高等学校で学ぶ電磁気学は積分形となじみが良い．電磁気学では，ある時刻 t および場所 $\boldsymbol{x}$ における電場 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$, 磁場 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)$ を決めることが主題とされる．“場” というのは現代物理学における 1 つのキーワードであるが，数学的には単なるベクトルに値を持つベクトル値関数に他ならない．電束密度 $\boldsymbol{D}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を通常考えるが，真空中では定数 ϵ_0,μ_0 によって $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ の関係にあり，これらを微小面積を通過する電気力線・磁力線の本数という直感に結びつけて学んでいることと思う．

さて，電磁気の基礎法則を思い出しそれらを順に線積分・面積分を用いて表現していこう．

- **ガウスの法則：**空間の閉曲面 S を内から外に向かって出て行く電気力線の総数は S によって囲まれた領域に存在する電荷の総量に等しく，時刻 t の荷電密度を $\rho=\rho(\boldsymbol{x},t)$ と表すと
$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \qquad (1)$$
が成り立つ．ここで，V は S によって囲まれた体積領域，dV は体積素を表す．
- **ファラデーの電磁誘導の法則：**空間の閉曲線 C と C を境界に持つ領域を D とするとき，C に沿った起電力は D を貫く磁力線の時間変化率に等しい；
$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{x}=-\frac{d}{dt}\iint_D \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2)$$
ここで，D を表から見るとき D の内部を左手に見るような進行方向を C の向きとする．
- **磁気単極子はない：**任意の閉曲面 S について
$$\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0. \qquad (3)$$
- **マクスウェル・アンペールの法則：**(2) の設定で
$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x}$$
$$=\mu_0\iint_D \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\iint_D \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (4)$$
が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ は電流密度と呼ばれるベクトル値関数で，$\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$ が面積素 $d\boldsymbol{S}$ を通過する電流量を表すように定義される．(2) 式と同様に，閉曲線 C に沿った “起磁力”

は D を貫く電流と，電束の時間変化率（電束電流）によって決まる，という法則である．

注意：(2) において C を境界に持つような領域 D は幾通りも考えられるが，(3) の性質のおかげで D の取り方にはよっていないことが分かる．(4) の場合，総電荷が増減しないことを表現する式

$$\iint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} + \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = 0 \qquad (5)$$

が同様な性質を保証する．上に現れる式を荷電に関する**連続の式**と呼んでいる．

以上，中学・高等学校に学んだ基本的な電磁気学の法則が忠実に，線積分や面積分を用いて表現されている様子が理解できるであろう．(1)〜(4) を微分を用いて等価に表現する方程式系が**マクスウェル方程式**である．

問 1 ガウスの定理・ストークスの定理を用いて

(1)′ $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho,$

(2)′ $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B},$

(3)′ $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0,$

(4)′ $\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$

が (1)〜(4) に等価であることを示せ．

解：例えば，(1) でガウスの定理を閉曲面 S に当てはめれば $\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V (\operatorname{div}\boldsymbol{E})dV$ であり，これが (1) の右辺に等しく，また，任意の S について成立するから体積積分がとれて，被積分の間で等号が成り立つ．(2) の場合は，ストークスの定理を使って同様な議論を行えばよい．(3), (4) も同様である． □

ベクトル解析では，ナブラと読む微分演算子 $\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ をしばしば用いる．この記号を使うと

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E},\ \ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$$

のように内積・外積記号を用いて表現される．

問 2 荷電密度に関する連続の式（の微分形）

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

をマクスウェル方程式から導け．

解：ベクトル解析にしばしば現れる公式

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{X}) = 0$$

を用いて，(4)′ 式の両辺の発散（div）を取る．その後，(1)′ を使うと直ちに得られる． □

問 3 $\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ の場合に，マクスウェル方程式から，

$$\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\boldsymbol{E} = \left\{\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

を導き（$\frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0$），電場・磁場が速さ c の波として伝搬することを示せ．

解：条件のもとでマクスウェル方程式は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$ で与えられる．後半 2 つの式の両辺にそれぞれ $\boldsymbol{\nabla}\times$ を施し，ベクトル解析の公式

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{X} \quad (7)$$

を用いるとよい． □

19 世紀半ばまで静電場の理論（クーロンの法則），定常電流が生成する定常磁場の理論（アンペールの法則）は別の理論と考えられていたが，マクスウェルは時間変化も取り入れて考えると 1 つの統一した理論にまとめ上げられることを示しその方程式系を前出のように書き上げたのであった．その帰結として，電場・磁場が速さ c で進行する電磁波の存在が明らかになり，それが光と同定されたのであった．上の問で 2 つの条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ が放置されているが，これらは電磁波が進行方向に垂直な方向のみに振動する横波であることを示している．以下では，$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}, \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ とする（定常な）マクスウェル方程式から，静電場，定常電流の法則を導いてみよう．

問 4 空間 $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{X}$ について次を示せ．

(1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\nabla} f$ と表す f が存在する．

(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \operatorname{rot}\boldsymbol{Y}$ と表す $\boldsymbol{Y}$ が存在する．

解：(1) で ∇f は $\mathrm{grad}\, f$ とも表現される．(1), (2) 共に $\Leftarrow$ を確かめるのは容易である．$\Rightarrow$ もそれほど困難ではないが紙面を使うので省略する（例えば拙書[1]，命題 4.18, 19 を参照）． □

実は，問 4 (1), (2) の性質は $\mathbb{R}^3$ の性質に根ざすことが知られていて，微分形式の理論で**ポアンカレの補題**として統一して表現される．$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ であるとき，マクスウェル方程式 $(2)'$ $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ と上の性質 (1) を合わせ，また $(3)'$ $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と上の性質 (2) を合わせると

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi, \ \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

と表すスカラー関数 ϕ とベクトル値関数 $\boldsymbol{A}$ の存在が分かる．ϕ は空間の各点の電位を表すおなじみの静電ポテンシャルである．また，$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる．

問 5 定常電磁場のマクスウェル方程式はポテンシャル関数を用いて

$$\mathbf{(1)''} \quad -\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{（ポアソンの方程式）},$$

$$\mathbf{(4)''} \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

のように表されることを示せ．

解：$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ と，ベクトル解析の公式 (7) を用いると直ちに導かれる． □

距離 r の位置に置かれた 2 つの点電荷 $q, q'(=1)$ には，$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$ のクーロン力が働く．この事実は「点 $\boldsymbol{x}_0$ に置かれた点電荷 $q' = 1$ は空間に $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^3}$ の電場を生ずる」と表現され，ガウスの法則の積分形 (1) から容易に導かれる．ベクトル解析の計算を行うと

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^3} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}$$

となり，これから静電ポテンシャルが決められる．従って，この静電ポテンシャルは荷電密度 $\rho = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$（ディラックのデルタ関数）に対するポアソンの方程式 $(1)''$ の解である．ポアソンの方程式の解を議論するにはとても紙面が足りないが，このことから

$$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

の関係式が理解されるであろう．デルタ関数の性質と合わせて次の問を示すのは容易であろう．

問 6 空間の有限な領域に分布する荷電密度 ρ に関するポアソンの方程式 $(1)''$ の解は

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}d^3\boldsymbol{y}$$

であることを示せ．ここで，$d^3\boldsymbol{y} = dV_y$ は体積素を表す．

最後に，定常電流 $\boldsymbol{j}$ が定める磁場を決める式 $(4)''$ を調べよう．まずベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ について反省する必要がある．電位を表すスカラーポテンシャル ϕ の定数部分が定まらないのは定義から明らかであるが，これに対応して $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$ の変換によって $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ は不変である．従って，$(4)''$ の解は $\boldsymbol{A}$ を一意的には定めないことが分かる．この変換を**ゲージ変換**と呼ぶが，この自由度を取り除くことを「ゲージを固定する」などと言う．定常電流の場合，付加条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を課すことによってゲージを固定するのが標準的であり，このことを「クーロンゲージを取る」などと表現する．

問 7 空間の有限な領域に分布する（定常）電流密度 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ の定める磁場が

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^3}d^3\boldsymbol{y}$$

で与えられることを $(4)''$ から導け．

概略：付加条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$（クーロンゲージ）のもとで $(4)''$ は，各座標成分ごとに成り立つポアソンの方程式 $-\boldsymbol{\nabla}^2 A_k = \mu_0 j_k$ $(k = 1, 2, 3)$ となる．従って，問 6 と同様にして解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}d^3\boldsymbol{y}$$

が得られる．この解が確かに付加条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満たすことを確かめて，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を積分記号の下で計算すればよい． □

電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ が空間曲線 C に沿った電流 I であるとき，問 7 の結果を表示すると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \times d\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^3}$$

が得られ，これは（直線定常電流の場合におなじみの）**ビオ・サバールの公式**に他ならない．

3. 電磁場のエネルギー

マクスウェル方程式は複雑な偏微分方程式系であるが，この方程式系から基本的な物理法則はすべて導出される．ベクトル解析の公式を用いて電磁場のエネルギーに関する公式を導いてみよう．まず，ニュートン力学の場合を復習することから始めよう．

問 8 中心力場の力 $f(r)=\frac{dV(r)}{dr}$ $(r=\|\boldsymbol{x}\|)$ を受ける質点 m のニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2}=f(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

と表される．このとき，角運動量保存の法則，エネルギー保存の法則を導け．

解： 質点の座標を $\boldsymbol{x}(t)$ と表すとき，運動量は $\boldsymbol{p}=m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$，角運動量は $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ で定義される．ベクトル解析の公式（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$）を用いると直ちに

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=f(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,l_3)$ の各成分が時間によらない保存量であることが示される．エネルギー保存の法則は，運動方程式の両辺で $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ との内積を取ることによって

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Leftrightarrow\frac{dE(t)}{dt}=0$$

が得られる．ここで，$E(t)$ は質点のエネルギーで $E(t)=\frac{m}{2}(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt})^2+V(\|\boldsymbol{x}\|)$ である． □

電荷 q を持つ質点 m には，電磁場からクーロン力の他にローレンツ力 $q\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{B}$ が働き，質点はニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2}=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}(t),t)+q\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t),t)\quad(8)$$

をみたす．他方で，質点は荷電密度 $\rho(\boldsymbol{y},t)=q\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}(t))$ および電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y},t)=q\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}(t))$ を与え，マクスウェル方程式 $(1)'\sim(4)'$ が電磁場を定めるという複雑な相互作用系が実現する．

問 9 荷電質点と電磁場の相互作用系において，質点を包む閉曲面 S とその内部 V について

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2+\iiint_V\left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2+\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2\right)dV\right\}$$
$$=-\frac{1}{\mu_0}\iint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つことを示せ．

解： 前問と同様に (8) の両辺で $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ との内積を取り，

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2=q\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{E}$$
$$=\iiint_V\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y},t)dV_y$$

が得られる．マクスウェル方程式 $(4)'$ を使って

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$$

と計算し，さらにベクトル解析の公式

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})+\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

とマクスウェル方程式 $(2)'$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$ から

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2+\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

を得る．ガウスの定理を用いれば主張の式となる． □

問 9 の体積積分から $\mathcal{E}=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2+\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$ が電磁場のエネルギー密度を与えることが読み取れる．また，面積分に現れる $\boldsymbol{P}:=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ は曲面 S を単位面積あたり内から外に向かって出て行く電磁エネルギーの流れを表していると読める．このエネルギーの流れを表すベクトル $\boldsymbol{P}$ は**ポインティングベクトル**と呼ばれている．時間的に変化する電流密度があると電磁波が発生し伝搬する．その様子がマクスウェル方程式から導出される様子など，興味が尽きることはないが拙書[1)]（p.149 章末問題）やより進んで文献 2) などを参照されたい．

4. 流体力学の基礎方程式

ベクトル解析はものの流れを表す数学的な処方と言えよう．そのような視点に立って流体力学の方程式とその基本的な性質を見てみよう．

流体力学では，各時刻 t において流体が定める速度の場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ と流体の密度 $\rho=\rho(\boldsymbol{x},t)$ を基本

量に考える．このとき，$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ は電流密度ベクトルに対応し $\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$ が単位時間に面積素 $d\boldsymbol{S}$ をその向きの方向に通過する流体の総質量を表す．従って，(6) に対応して質量が消失したり生成しないという条件は

$$\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

という形の連続の式で表現される．速度の場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ は各時刻 t ごとに空間のベクトル場を定め，これらが映画のコマのように動いて，ものが流れている様子をイメージすると良い．空間曲線 $C:\boldsymbol{x}(t)(a\le t\le b)$ で，その接ベクトルが速度の場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ に沿っているもの，すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{9}$$

を満たすものを**流線**と呼ぶ．我々は日常的に無数の流線をイメージしてものの流れを把握している．

流体の基礎方程式を導いてみよう．そのために，時刻 $t=0$ で曲面 S_0 によって囲まれた空間領域 V_0 を考え，そこに存在する質点の塊を考えよう．流体に粘性がないとき，塊に働く力は重力などの (保存) 力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}=\iiint_{V_0}\rho\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}$ の他に S_0 を介して受ける外側からの圧力の総和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}=-\iint_{S_0}pd\boldsymbol{S}$ から成る (粘性がないので圧力は面に垂直に働く)．

問 10 空間領域 V_0 の塊が受ける力について

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}=\iiint_{V_0}\{-\rho\boldsymbol{\nabla}U-\boldsymbol{\nabla}p\}\,d^3\boldsymbol{x}$$

を示せ．但し，$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{\nabla}U$ とする．

解：$\iint_{S_0}pd\boldsymbol{S}=\iiint_{V_0}\boldsymbol{\nabla}p\,d^3\boldsymbol{x}$ を示せば良い．第 i 成分は $\iint_{S_0}(p\boldsymbol{e}_i)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{V_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}d^3\boldsymbol{x}$ と書かれるが，$\mathrm{div}(p\boldsymbol{e}_i)=\frac{\partial p}{\partial x_i}$ であり，ガウスの定理によって確かに成立する． □

上の問で求めた力を受けて V_0 の塊は V_t の塊へと形を変えて運動する．このとき，V_0 の各点 $\boldsymbol{x}_0$ から出る流線は V_t の点 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)$ を（1 対 1 に）定め，特に t が微小のとき (9) より

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0,0)t+o(t) \tag{10}$$

と表される．V_t の塊が持つ運動量の総和は

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)=\iiint_{V_t}\rho(\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},t)d^3\boldsymbol{y}$$

と表されるが，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{P}}(0)=\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}$ が塊 V_0 に対する（$t=0$ での）ニュートンの運動方程式である．

問 11 ニュートンの運動方程式から次の非粘性流体に関する**オイラーの方程式**を導け．

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}=-\nabla U-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p. \tag{11}$$

解：運動量の総和 $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$ において $\boldsymbol{y}$ は V_t 内の点を表す座標である．一方で，(10) によって V_0 の座標と V_t の座標の間の関係式が得られていて，しかも V_0 と V_t は 1 対 1 の対応関係を持つ．従って，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0,0)t+o(t)$ によって変数変換を行うことができ，重積分の変数変換公式から

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)=\iiint_{V_0}\rho(\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},t)\left|\frac{\partial(\boldsymbol{y})}{\partial(\boldsymbol{x}_0)}\right|d^3\boldsymbol{x}_0$$

が得られる．ここで，$\frac{\partial(\boldsymbol{y})}{\partial(\boldsymbol{x}_0)}$ は関数行列式で，

$$\frac{\partial(\boldsymbol{y})}{\partial(\boldsymbol{x}_0)}=1+t\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0,0)+o(t)$$

と計算できる．以上の下で $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{P}}(0)$ の計算はすべて，積分記号の中で行うことができ，結果を整理すると

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right)+\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$$

とまとめられる．第 1 項は連続の式から消えて，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}$ を表す問 10 の結果と合わせると求める運動方程式が得られる． □

オイラーの方程式の左辺は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t),t)=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\left(\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}$$

と表現でき，従って流線に沿って行う時間微分と解釈される．この微分を**ラグランジュ微分**と呼んでいる．

問 12 非圧縮流体（$\rho=$ 定数）で $U=U(\boldsymbol{x})$，$p=p(\boldsymbol{x})$ のとき，流線に沿って $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+U+p$ の値は一定である（**ベルヌーイの定理**）ことを示せ．

解：これは流線 $C:\boldsymbol{x}(t)$ に沿ったエネルギー保存の法則である．実際，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t),t)^2+U(\boldsymbol{x}(t))+\frac{1}{\rho}p(\boldsymbol{x}(t))\right)=0$$

であることがオイラーの方程式 (11) と流線の定義

式 (9) から確かめられる． □

ベルヌーイの定理をつかうと，例えば飛行機の翼に生じる揚力が次のように説明できる：翼の周りに空気の定常的な流れができたとき，翼の上側の流線に沿った空気の流れの速さを v_1，圧力を p_1 とし，下側の流線に対して同様に v_2, p_2 とおく．このとき，$v_2 < v_1$ である一方で，ベルヌーイの定理によって $\frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2$ が成り立つから圧力について $p_2 > p_1$ であることが分かる．この圧力差によって揚力が生じるのである．

粘性のない流体では，V_0 の塊に働く力は圧力 p を通して面積素 $d\boldsymbol{S}$ の方向の力の総和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}$ で与えられた．一般の流体は粘性を持ち，面に垂直な方向以外にも粘性によって力が働くが，それを数学的に 3×3 対称行列 $\mathbb{P} = (p_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ を用いて S_0 の無限小面積素 $d\boldsymbol{S} = (dS_1, dS_2, dS_3)$ に働く力が

$$\mathbb{P} \cdot d\boldsymbol{S} := \left(\sum_j p_{1j} dS_j, \sum_j p_{2j} dS_j, \sum_j p_{3j} dS_j \right)$$

であるとして表現する．このとき V_0 の塊に働く力の総和は

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}} = \iint_{S_0} \mathbb{P} \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．粘性流体では，速度の場を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ と書くとき，粘性係数 η を与えてこの行列を

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\delta_{ij} \right\}$$

で与える．ここで δ_{ij} はクロネッカーの記号である．粘性は速度（勾配）に比例し，$\eta = 0$ の場合 $\mathbb{P} \cdot d\boldsymbol{S} = -p d\boldsymbol{S}$ となり問 10 を再現することから自然な仮定と理解されるであろう．上のように $d\boldsymbol{S}$ に働く力を表現する行列 $\mathbb{P}$ を一般に**応力テンソル**と呼んでいる．

問 13 上の F_{II} を用いて問 10 を計算し

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla U - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \frac{\eta}{3\rho}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})$$

を導け（$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ はラグランジュ微分）．

上の式がオイラーの方程式 (11) を一般化した**ナビエ・ストークスの方程式**である．紙面も尽きたので，問 13 の解答は各自の演習に委ねることにしたい．さらに，流れの循環や渦の運動など流体力学の具体的な問題については文献 4) が入門的でかつ楽しく読めてお薦めである．

5. マクスウェル方程式とローレンツ共変性

ニュートンの運動方程式 $m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ は，1 つの空間座標 K_0 に対し等速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている空間座標 K_t への座標変換 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t$, $t' = t$（ガリレイ変換）によって，[運動量の変化率＝受ける力] という "法則の形" を変えない（この性質を**共変性**と呼ぶ）．運動の法則がこのような形で成立する座標系を**慣性系**と呼ぶが，太陽を原点に恒星に対して固定する座標系は慣性系と考えられている．これに対しコリオリ力という仮想的な力が出現する地球と共に回転する回転座標系は慣性系ではない．

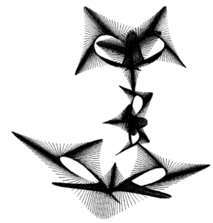
マクスウェル方程式系はガリレイ変換で複雑に形を変えるが，電場・磁場の新しい表示を読み取り，得られた新しい式を再び [起電力＝磁束の変化率] などと解釈できるかという共変性の問題が 19 世紀末に議論された．マイケルソン・モーレイの実験をはじめ幾つかの有名な実験が行われ，その結果電磁法則はガリレイ変換で共変でないことか確定し，他方でマクスウェル方程式系の数学的対称性からローレンツ変換が認識され，20 世紀を迎えて特殊相対論へと発展したのであった．歴史的記述を含めて文献 3) の第 10, 11 章に詳しい解説がある．

参考文献

1) 細野　忍，『微積分の発展』朝倉書店，2008.
正誤表 http://www.asakura.co.jp/books/isbn/978-4-254-11758-5/
2) 後藤憲一，山崎修一郎，『詳解電磁気学演習』共立出版，1970.
3) 砂川重信，『理論電磁気学』紀伊國屋書店，1999.
4) 戸田盛和，『流体力学 30 講』朝倉書店，1994.

（ほその・しのぶ，東京大学大学院数理科学研究科）

相対性理論とベクトル解析



山田　澄生

1. はじめに

相対性理論の指導原理であるアインシュタイン方程式は，4 次元多様体上に定義されるローレンツ計量が満たす偏微分方程式である．方程式の解（これらはアインシュタイン計量とよばれる）が定義される多様体／時空は，我々が体感する空間が局所的に 3 次元ユークリッド空間であり，また時間が 1 次元ユークリッド空間と同一視されることから 4 次元である．ローレンツ計量とは，4 次元空間の接ベクトルの長さを決める尺度，つまり時空の位置座標の変化率を表す速度ベクトルの大小関係を決定する道具である．アインシュタイン方程式は，偏微分方程式のなかでも最も難解なものの一つとして知られており，多くの数学者にとって，その重要性に裏打ちされた輝きと，技術的な困難をともなう厳しさの双方をもつ特別な方程式であると言えるであろう．

ここでは，アインシュタイン方程式の解の中でも時間対称性をもつ解に関して解説していく．各アインシュタイン方程式の時間的局所解は，時間対称性のもとでは 3 次元多様体上に定義されたリーマン計量と同一視され，さらに漸近平坦性を持つリーマン計量においては，ニュートン力学との対応が明示的になり，ベクトル解析の応用の場として興味深い文脈を提供する．

2. ガウスの定理

英語では Divergence Theorem とよばれるガウスの定理は，ベクトル場の発散（divergence）の積分量に関する命題である．いま $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}\}$ 上に定義されたベクトル場があり，$\mathbb{R}^n$ の有界な開領域 Ω の境界集合である超曲面 $\partial\Omega$ を考える．このとき任意のベクトル場 $V(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x)) = \sum_{1=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に対して $\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x^i}$ としたとき，

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x) d\mu(x) = \int_{\partial\Omega} V(p) \cdot \nu(p) d\sigma(p)$$

が成り立つ．ここで $d\mu$ は $\mathbb{R}^n$ の体積要素，$d\sigma$ は超曲面 $\partial\Omega$ の面積要素，そして $\nu(p)$ は $\partial\Omega$ の p における外向きの単位法線ベクトルとする．最も簡単な状況は，$n = 1$ のとき $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ とすると，任意の滑らかな関数 $f(x)$（$f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ という $\mathbb{R}$ 上のベクトル場と同一視）に対して成り立つ微積分の基本定理

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$$

である．境界 $\partial\Omega = \{a\} \cup \{b\}$ の b における外向きの単位法線ベクトルが $\frac{\partial}{\partial x}$，$a$ における外向きの単位法線ベクトルが $-\frac{\partial}{\partial x}$ であるため，右辺を境界上の積分と見なした．

ベクトル場を水の流れのモデルとして考えたとき，その発散がある点 P で正であるとは P において水が湧き出ている状況，負であるとは P で水が吸い込まれている状況，そしてゼロであることは P において水の流れが外界から影響を受けていない状況である．発散定理は，ある瞬間に領域 Ω の境界を介して出入りする水の総量は，領域内での水の量の変化率と等しいという，ごく当り前の状況を定量化している命題に他ならない．

問題　$\mathbb{R}^2$ 上の発散が消えている $(\operatorname{div} V = 0)$ ベクトル場 V を挙げ，Ω を単位円板 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ としたときに発散定理が成り立つことを確かめよ．

3. リーマン多様体上の発散定理

多様体の定義は近代数学および理論物理の歴史にお

いて極めて重要なポイントであり，それ自体とても興味深い話題である．ここでは歴史には深入りせずに多様体とは，局所的にユークリッド空間の形をしている空間，またはユークリッド空間をモデルとした地図が何枚も張り合わされた空間と考える．いま多様体 M の上を動く粒子がある点 P にあるとき，その粒子の速度ベクトルに長さを与えるリーマン計量 g は，接空間の内積 $= g(v,w)$ を特定する．多様体上の滑らかな曲線 $\gamma : [0,1] \to M$ の長さは，速度ベクトルの時間積分

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

で定義され，この量は曲線の助変数表示に依存しない．M 上の点 P と Q を結ぶ曲線の中で最小の長さを持つ曲線 γ があるとき，その長さを，リーマン計量 g から誘導された P と Q の距離 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ とよぶ．またこのとき，γ を P と Q をむすぶ測地線とよぶ．

リーマン多様体上で，ベクトル解析を展開するためにユークリッド空間上の偏微分の一般化である共変微分を定義する．ユークリッド空間上で関数 f を，点 P であるベクトル V の方向に微分するとは $\frac{d}{dt} f(\mathrm{P}+tV)|_{t=0} = \langle V, \nabla f \rangle$ で自然に定義される．ここで ∇f は f の勾配ベクトルで，$\langle\ ,\ \rangle$ は内積である．またベクトル場 W をベクトル場 V で微分するとは，ベクトル場 W の各成分を関数とみなして，それぞれを V の方向に微分することであった．いまリーマン多様体 M 上のベクトル場 V, W が与えられたとき，ユークリッド空間上のベクトル場の微分の一般化として，以下の性質を満たす微分作用素 $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が存在する：

- $D_{fV} W = f D_V W$.
- $D_V(fW) = V(f) W + f D_V W$.
- $X(g(V,W)) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W)$.
- $[V,W] = D_V W - D_W V$.

上で $\mathfrak{X}(M)$ は M 上の滑らかなベクトル場全体を表し，また f は M 上の関数，$[V,W]$ は V と W のブラケット積とする．この作用素を g によって定まる共変微分，またはレビ・チビタ接続とよび，その存在と一意性はリーマン幾何学の基本定理[2]とよばれる．

M 上の点 P の近傍で定義されるベクトル場の組 $\{E_i\}_{i=1}^n$ で，P において座標ベクトル場の組 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathrm{P})\}_{i=1}^n$ と一致する単位ベクトル場で，かつ E_i と E_j が $i \neq j$ のとき直交するものとする．このようなベクトル場の組 $\{E_i\}_{i=1}^n$ は M 上の正規直行フレームとよばれる．ベクトル場 V の発散 $\operatorname{div} V$ を $\sum_i g(D_{E_i} V, E_i)$ で定義する．また $X \mapsto D_V X$ というベクトル場からベクトル場への写像の点 P における g に関するトレースとしても $\operatorname{div} V(\mathrm{P})$ が定義できる．

また M 上の関数 f の勾配ベクトル ∇f を，$\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ で定義する．座標系に依らない定義としては，$g(\nabla f, X) := X(f)$ がある．

ここでリーマン計量 g に関するラプラシアン（ラプラス作用素）を $\triangle_g f = \operatorname{div}(\nabla f)$ で定義する．リーマン多様体上で $\triangle_g f = 0$ を満たす関数 f を調和関数とよぶ．

いまリーマン計量 g に関する共変微分 D と，それから誘導される微分作用素 ∇ と div を用いることで，ガウスの定理をリーマン多様体上で一般化できる．

発散定理[2]　向き付け可能なリーマン多様体 M 上の開領域 Ω とその境界集合 $\partial\Omega$ に対して，ν を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル場とする．このとき任意のベクトル場 V に対して，次の等式が成立する：

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x)\, d\mu_g(x) = \int_{\partial\Omega} g(V,\nu)(p)\, d\sigma_g(p).$$

ここで，$d\mu_g$ は計量 g の体積要素，$d\sigma_g$ は g から誘導された境界 $\partial\Omega$ の面積要素である．

4. ニュートンからアインシュタインへ

3 次元ユークリッド空間と時間軸の直積空間上で定義されるニュートン力学を記述する方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \boldsymbol{x}}{ds^2} = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ s \in \mathbb{R}), \\ \triangle_{\mathbb{R}^3} \phi = 4\pi\rho \end{cases}$$

を考える．ここで $\rho(x)$ は，点 x における質量の密度 (≥ 0) を表す．

アインシュタイン方程式[3]を満たす 4 次元ローレンツ多様体 (M^4, g) 上での測地線の方程式との比較を考えると

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x^i}{ds^2} = -\displaystyle\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(x) \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad (0 \leq i \leq 3), \\ R_{ij}(g) - \dfrac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi T_{ij} \left(\overset{\text{真空時}}{=} 0 \right) \end{cases}$$

となる．ここで，計量 g に関するクリストフェル記号 Γ^i_{jk} は計量 g の 1 階微分，リッチ曲率 R_{ij}，スカラー曲率 R は計量 g の 2 階微分で決まるテンソルである．この第 2 式が，アインシュタイン方程式である．

ニュートン力学に現れるベクトル場 $\nabla\phi$（単位質量を持つ粒子の受ける重力）は，ポテンシャル ϕ の 1 階微分として，一方ローレンツ多様体上では測地線の加

速度を司るクリストフェル記号 Γ^i_{jk} は，ローレンツ計量 g の1階微分として現れる．一方リーマン計量（3次元ユークリッド計量）を持つ空間上に定義されたポテンシャル ϕ の満たす方程式は2階楕円型偏微分方程式（ポアソン方程式），ローレンツ計量を持つ空間上（ローレンツ多様体）に定義されたローレンツ計量 g の満たす式は，2階双曲型偏微分方程式（アインシュタイン方程式）というアナロジーがここで成り立っている．このアナロジーは決して自明なものではないが，光の速度が非常に大きいということを考慮すると，後者は前者を近似[4]していることがわかる．

5. ニュートン力学の質量

次に，アインシュタイン方程式とニュートン力学の対比について，それぞれの文脈で定義される質量を通して考えてみる．まずベクトル解析の重要な命題を思い出す．

ポアンカレの補題[5]　f は $\mathbb{R}^3$ 上で定義された連続関数で，その台はコンパクトとする，つまり

$$\exists R > 0 \text{ such that } \mathrm{spt}(f) \subset B_R(0).$$

さらに $\int_{B_R(0)} f = 0$ を仮定する．このとき，

$$\operatorname{div} V = f, \ \mathrm{spt}(V) \subset B_R(0)$$

を満たすベクトル場 V が存在する．

問題　ポアンカレの補題を証明せよ．

さて，関数 $\rho(x) \geq 0$ とコンパクトな台をもつ（$\mathrm{spt}(\rho) \subset B_R(0)$）ベクトル場 V が，$\operatorname{div} V = 4\pi\rho$ を満たすとすると，発散定理から

$$\int_{B_{3R}(0)} 4\pi\rho = \int_{B_{3R}(0)} \operatorname{div} V = \int_{\partial B_{3R}(0)} V \cdot \nu = 0$$

となり，ρ の積分は消えていることが必要である．$m := \int \rho\, dx \geq 0$ を総質量と呼ぶ．つまり総質量 $m > 0$ の値がコンパクトな台を持つベクトル場の存在の障害となっている．一方で，上のポアンカレの補題は，この $\rho \geq 0$ の積分がポテンシャル ϕ の存在の唯一の障害であることを保証する．

いま $\rho \geq 0$ をコンパクトな台を持つ $\mathbb{R}^3$ 上に定義された質量密度とする．このとき ρ が起因する重力場はニュートン・ポテンシャル ϕ によって次のように書き表される：

$$F = -\nabla\phi.$$

ここで物質密度 ρ と勾配ベクトル場 $\nabla\phi$ の関係はポアソン方程式

$$\triangle_{\mathbb{R}^3}\phi = 4\pi\rho \quad \text{on } \mathbb{R}^3,$$

そして $\phi \to 0$, as $x \to \infty$ を満たす．

上のポアンカレの補題に関する議論から，ρ をデータと見なしたポアソン方程式の解 ϕ はコンパクトな台を持ち得ない．ρ の台の外的領域 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{spt}(f)$ 上での調和関数 ϕ を漸近展開すると，$|x| \gg 1$ で

$$\phi(x) = \frac{c}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

今，この c の値を発散定理を用いて定める．ここでユークリッド計量に関するラプラシアン $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ は $\operatorname{div}(\nabla f)$ という勾配ベクトル場の発散という形をしているので，発散定理を用いて，以下が従う：

$$\begin{aligned} 4\pi m &= \int 4\pi\rho\, dx = \int \operatorname{div}(\nabla f)\, dx \\ &= \int_{\partial B_R} \frac{\partial\phi}{\partial|x|} \quad d\sigma_{S^2_R} \\ &= \int_{\partial B_R} \left[-\frac{c}{R^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right] \quad d\sigma_{S^2_R} \\ &= -4\pi c + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

ここで $d\sigma_{S^2_R}$ は半径 R の球面の面積要素で $R^2 d\sigma_{S^2_1} = d\sigma_{S^2_R}$ という関係が成り立つ．この等式がすべての R に関して成り立つことから $m = -c$ となり，ポテンシャルは $\phi(x) = -\frac{m}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$ で与えられる．つまり，ニュートン力学の言葉では，質量はポテンシャル ϕ の漸近展開の $\frac{1}{|x|}$ の係数として現れていることに注意する．

以上のポアンカレの補題に付随する議論から，ニュートン力学では有限分布を持つ物質は，必ず無限球上でポテンシャル関数 ϕ の非自明な $\frac{1}{|x|}$ に関する漸近展開を誘導することがわかった．見方を変えると，無限遠方でポテンシャル関数 ϕ のモノポール（$\frac{1}{|x|}$ の項）が消えるのは真空の場合しかないという剛性（rigidity）が成り立っていると解釈できる．

6. 相対論における質量

宇宙空間において（星や，ガスからなる）物質の群が存在していて，かつ群どうしはお互いに遠く離れている状況では，それぞれの群が isolated system をなしていると考えてよい．この状況の数学的モデルである漸近平坦性[3]を定義しよう．

3次元多様体 Σ 内に，あるコンパクトな集合 K が

あり，$\Sigma \setminus K$ は $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ と微分同相なエンドとなっており，またこのエンド上で $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ を局所座標系としてリーマン計量 h を表示したとき，$\mathbb{R}^3$ の標準計量 $\delta_{ij} dx_i \otimes dx_j$ に漸近するとする．Σ を漸近平坦な多様体とよぶ．星やガスは，このモデルではコンパクト集合 K 内に存在していて，それらに起因する重力は，エンド上で減衰していく様子を漸近平坦性は描写していると考えてよい．ここではさらに単純化して

$$u(x) = 1 + \frac{c}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x^i)^2}$$

という漸近展開をもつ関数 u によって，エンド上でリーマン計量が $h_{ij} = u^4 \delta_{ij}$ の形をしていると仮定する．また h のスカラー曲率が非負である状況を課す．これは優エネルギー条件[3]という 4 次元時空の因果律 (causality) を Σ^3 に制限したときの必要条件である．

計量 h のエンドにおけるスカラー曲率 $R(h)$ は，計量の共形変換による曲率の変換公式[1]から

$$R(h) = -8u^{-5} \left(\triangle_{\mathbb{R}^3} u - \frac{1}{8} R(\delta_{ij}) u \right)$$

と表現されるので，ユークリッド空間の平坦性 $R(\delta_{ij}) = 0$ と優エネルギー条件 $R(h) \geq 0$ を鑑みると u が優調和

$$\triangle_{\mathbb{R}^3} u \leq 0$$

であることが従う．

さらに，u の漸近表示 $u(x) = 1 + \frac{c}{r} + \mathcal{O}(r^{-1})$ と，優調和関数の最小値原理より $\inf_\Sigma u = 1$ すなわち $c \geq 0$ から従う．

定義　漸近平坦なエンドを持つリーマン多様体 (Σ, h) の ADM (Arnowitt–Deser–Misner) 質量を

$$m = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_R^2} (h_{ij,i} - h_{ii,j}) \nu^j \, d\sigma_{S_R^2}$$

で定義する．

$h = u^4 \delta_{ij}$ でかつ $u(x) = 1 + \frac{c}{r} + \mathcal{O}(r^{-1})$ という現在の状況では，直接の計算により $c = \frac{m}{2}$ が従う．

結論として上の状況では，ADM 質量 m は非負であることが従う．実際に一般的な状況において以下の命題が示されている．

正質量定理 [Schoen-Yau[9], Witten[10]]　漸近平坦かつスカラー曲率が非負な 3 次元リーマン多様体 (Σ, h) のエンドの ADM 質量 m は非負の値をとり，$m = 0$ のときは (Σ, h) が $\mathbb{R}^3$ に等長なときに限る．

7. シュバルツシルト時空とブラックホール

漸近平坦なブラックホール時空のモデルであるシュバルツシルト時空の具体的な表示をみてみよう．

4 次元多様体

$$M^4 = \{(t, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \mid |\boldsymbol{x}| \neq 0\}$$

上に計量 g_{Sch} を

$$-\left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)^{-1} dr^2 + \rho^2 d\xi^2$$

で定める．ここで，m は質量を意味する正定数，$\rho = |x|$，$d\xi^2$ は単位球面の標準計量である．このとき，無限遠方，つまり $\rho \to \infty$, t は任意，とすれば

$$g_{\mathrm{Sch}} \to g_{\mathrm{Min}} = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\xi^2,$$

つまり g_{Sch} はミンコフスキー空間の標準計量に近づく．この意味で g_{Sch} は漸近的平坦な時空である．ちなみにミンコフスキー空間 $(\mathbb{R}^4, g_{\mathrm{Min}})$ は平坦，つまり曲率テンソルが恒等的に消えているローレンツ多様体である．よってミンコフスキー計量はアインシュタイン方程式の自明な解である．

g_{Sch} を超曲面 $\Sigma_c = \{(t, x^1, x^2, x^3) \mid t = c\}$ に制限した計量を h，すなわち

$$h = g_{\mathrm{Sch}}|_{\Sigma_c} = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\xi^2$$

とする．このとき，無限遠方，つまり $\rho \to \infty$ とすれば

$$h \to d\rho^2 + \rho^2 d\xi^2$$

であり，h はユークリッド空間の標準計量に近づく．いま (Σ, h) は全測地的である．すなわち等長埋め込み $(\Sigma^3, h) \to (\mathbb{R}^4, g_{\mathrm{Sch}})$ の第 2 基本形式 k は恒等的に消えている．このように 3 次元多様体がアインシュタイン方程式を満たす 4 次元時空内に全測地線的に埋め込まれているとき，その時空を σ に関する時間対称的な解とよぶ．

ここで $h = v(r)^4 (dr^2 + r^2 d\xi^2)$ となるように変数変換を行う．

問題　常微分方程式系

$$v^4 dr^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2, \quad v^4 r^2 = \rho^2$$

の解が

$$\rho = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 r$$

となることを示せ．

よって h は $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上に定義された共形平坦な計量として

$$h = \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\xi^2)$$

と表された．共形因子 $1+\frac{m}{2r}$ が $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上の調和関数であることに注意する．

ここで，ADM 質量はアインシュタイン方程式のポテンシャルであるローレンツ計量（の Σ 上に制限されたリーマン計量）の漸近展開の $\frac{1}{|x|}$ の係数として現れることとの対比が成立する．

ここで $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 r の球面 $S^2(r)$ の面積 $A(r)$ は

$$A(r) = 4\pi r^2 \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4$$

である．

問題　関数 $A(r)$ は $r=\frac{m}{2}$ で最小値を取ることを示せ．

2 次元極小球面 $\left\{r=\frac{m}{2}\right\}$ は事象の地平線（の空間的断面）と呼ばれ，ブラックホールの境界と考えられている．「境界」の意味は，4 次元時空内の測地線の挙動を考えたとき，光の速度以下で動いている物体は，$r=\frac{m}{2}$ で定まる 3 次元超曲面の内から外に出ることはないということである．とくに光も脱出できないのでブラックホールとして観測される．一方で光の速度以下で外から中に入っていく物体を，超曲面を超えて外から観測し続けることは不可能であるという状況も伴う．

g_{Sch} の時間一定面の共形平坦な座標系による表示に現れる正定数 m の物理的な意味としては，$\mathbb{R}^3$ の原点からみて十分に遠方 $r \gg 1$ で，静止した物体を放すと，原点に向かって $-\frac{m}{r^2}$ で近似される加速度をもって「自由落下」することが確かめられる．ニュートン力学に現れる加速度の表示と一致することから，これが m が質量（正確には ADM 質量）とよばれる所以である．

8. 正質量定理の剛性

ここで，ニュートン力学の質量がポテンシャルの漸近展開の $\frac{1}{|x|}$ の係数として現れたことを思い出す．一方で，ADM 質量はアインシュタイン方程式のポテンシャルであるローレンツ計量の時間一定面 Σ 上に制限されたリーマン計量の漸近展開の $\frac{1}{|x|}$ の係数として現れる．

さらに正質量定理の命題にある剛性は，ADM 質量の値がゼロであることと，漸近的平坦な多様体が自明（ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ と等長）であることが同値であることを保証する．一般に ADM 質量は，漸近平坦なエンドにある無限遠球上での積分によって定義される量であるため，ADM 質量の値を変えることなくエンドから離れた有限領域で計量の摂動が可能であることが想像できる．しかしスカラー曲率の非負性のもとでは，正質量定理の剛性から ADM 質量の値がゼロの場合に限って，計量が多様体全体で完全に決定されることが従う．これはニュートン力学の場合に，ポテンシャルの漸近展開のモノポールが消えていることが，真空の場合に限られることのアナロジーと考えられる．

9. ペンローズの不等式

シュバルツシルト計量に現れた事象の地平線は，時間一定面 (Σ^3, h) 上で，面積が

$$A\left(\frac{m}{2}\right) = 4\pi r^2 \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 \Big|_{r=\frac{m}{2}} = 16\pi m^2$$

の値を持つ極小球面であった．この等式は ADM 質量とブラックホールの大きさを結びつける興味深いものである．実際に重力崩壊の結果として現れるブラックホールが存在する時空の ADM 質量を，事象の地平線の表面積 A で捉えることをペンローズは提唱[8]した．

ペンローズ予想　アインシュタイン方程式を満たす時空において

$$A \leq 16\pi m^2$$

が成り立つ．さらに等式は，時空がシュバルツシルト時空の場合に限る．

この予想は，時間一定面 (Σ^3, h) が時空内で全測地的部分多様体であるという条件のもと，以下の命題を用いることで H. Bray によって証明[6]された（Huisken–Ilmanen による別証明もある[7]）．

定理[6]　3 次元多様体 (Σ^3, h) が，漸近平坦かつ非負スカラー曲率を持つとし，その境界（事象の地平線）が極小曲面であるとする．いま $G(x)$ が

$$\triangle_h G = 0, \quad \lim_{x\to\infty} G = 1, \quad G|_{\partial\Sigma} = 0$$

を満たすとする．$G(x)$ の Σ の漸近平坦なエンドに

おける漸近展開を

$$G(x) = 1 - \frac{C}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

とすると $m \geq C$ が成立し，等号は (Σ^3, h) がシュバルツシルト時空の時間一定面のときに限る．

ここで新たに現れた量 C は，電磁気学で容量（Capacity）とよばれ

$$C_\Sigma(\partial\Sigma, h) = \inf\left\{\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma |\nabla\phi|^2\, d\mu_h\right\}$$

と等しい．ここでは無限遠球 S^2_∞ で 1，境界 $\partial\Sigma$ で 0 という境界条件を満たすリプシッツ連続な関数全体で inf をとる．

この計算をみてみよう．まずディリクレ・エネルギーの第一変分が消えること $\delta(\int_\Sigma |\nabla\phi|^2\, d\mu_h) = 0$ は，ラプラス方程式 $\triangle_h\phi = 0$ と同値である．よって $G\nabla G$ というベクトル場の発散を用いて，調和関数 G のディリクレ・エネルギーが表される：

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{div}\,(G\nabla G)\; d\mu_h &= \int_\Sigma |\nabla G|^2 + G\triangle_h G\; d\mu_h \\ &= \int_\Sigma |\nabla G|^2.\end{aligned}$$

一方でリーマン多様体上の発散定理から

$$\int_\Sigma \mathrm{div}\,(G\nabla G)\, d\mu_h = \lim_{R\to\infty}\int_{S^2_R\cup\partial\Sigma} h(G\nabla G, \nu) d\sigma_h$$

が従う．ν は $\partial\Sigma$ の p における外向きの単位法線ベクトルである．$\partial\Sigma$ 上で $G=0$ なので，右辺は

$$\begin{aligned}\int_{S^2_\infty} h((G\nabla G), \nu) d\sigma_h &= \lim_{R\to\infty}\int_{S^2_R}\frac{\partial G(|x|)}{\partial|x|}|x|^2 d\sigma_1^2 \\ &= 4\pi C\end{aligned}$$

となり

$$C = C_\Sigma(\partial\Sigma, h)$$

が従う．

容量 C の値は，Σ の幾何学的情報，とくに事象の地平線／ブラックホールの形状をディリクレ・エネルギーという解析的な言葉で表したものである．この値は ADM 質量の下界を特定している．さらに等式 $m = C$ はシュバルツシルト計量の特徴付けになっており，この状況も，やはり質量が特別な値をとるときに計量全体が決定されるという意味での剛性と見なすことができる．この定理の証明[6]には正質量定理が本質的に使われている．

10. おわりに

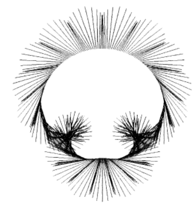
ここでは，有界領域に分布する物質やブラックホール等が，無限遠の球面上にどのような効果をもたらすかを発散定理の応用を介して紹介した．漸近的平坦かつ時間対称性を持つ時空は，ビッグ・バンや加速膨張論などの大域的かつ動的な，「世界の始まりと終わり」を議論する宇宙論の観点からはあまり面白くない状況ではあるが，一方で遠くの惑星系や銀河系等の天文学の観測のデータを理解するためには，被観測体（isolated system）を中心とする無限遠球上の一点に我々観測者がいるというモデルは標準的なものであり，実際数々の天体観測の結果を通じてアインシュタイン方程式の有効性は確かめられてきた．ベクトル解析の真髄は，ベクトル場や微分方程式などで体現される局所的な情報を積分を介して大域的な情報に焼き直すことであると（少し乱暴であるが）断言すれば，アインシュタイン方程式という偏微分方程式と時空の大域的な構造が発散定理を介して結びつくことに必然性があるように見受けられる．

参考文献

1) 小林治，芥川和雄，井関裕靖『山辺の問題』数学メモアール，第 7 巻 (2013), 日本数学会.
2) 酒井隆『リーマン幾何学』裳華房，1992.
3) 白水徹也『アインシュタイン方程式』臨時別冊・数理科学 2012 年 5 月，サイエンス社.
4) P.A.M. ディラック『一般相対性理論』ちくま学芸文庫，2005.
5) M. スピヴァック『多変数の解析学—古典理論への現代的アプローチ』東京図書，2007.
6) H.L. Bray, Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem, *J. Differential Geom.* **59** (2001) 177–267.
7) G. Huisken and T. Ilmanen, The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, *J. Differential Geom.* **59** (2001) 353–437.
8) R. Penrose, Naked singularities, *Ann. New York Acad. Sci.* **224** (1973), 125–34.
9) R. Schoen and S.-T. Yau, Positivity of the total mass of a general space-time, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979), 1457–9.
10) E. Witten, A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), 381–402.

（やまだ・すみお，学習院大学理学部）

数理科学とベクトル解析



砂 田 利 一

1. ガウスのノートから

1833年，既に老境に入り始めたとは言え，数学への情熱は未だ覚めやらぬガウス55歳のときである．ここ数カ月に及ぶ考察の纏めとして，この年の1月22日，彼は手許にあるノートに次のようなメモを記した．

「ライプニッツが示唆し，オイラーとヴァンデルモンドの二人だけが一瞥を与えた位置の幾何学*1)については，一世紀半経った今でもほとんど進展がない．

位置の幾何学と幾何学的量の間の接点における主要な問題は，2つの閉じた，あるいは無限に延びる曲線の絡み合いを調べることであろう．

x, y, z を第1の曲線上の点の座標，x', y', z' を第2の曲線上の点の座標とし，2つの曲線に沿う積分

$$\int\int \frac{1}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right)^{3/2}} \times \big[(x'-x)(dydz'-dzdy')+(y'-y)(dzdx'-dxdz') + (z'-z)(dxdy'-dydx')\big] \quad (1)$$

を V と置くとき，$V=4\pi m$ が成り立つ．ここで m は絡み合いの数である．

この数は，曲線の順序を取り替えても変わらない．1833年1月22日」

19歳から書き始めたガウスの日記（Mathematische Tagebuch）は，1796年3月30日の正17角形の作図可能性を述べた事項から数えて146項目18年間に及び，1814年7月9日を以って終了している[1,6)*2)]．しかしその後も，彼が重要と考える発見はノートに日付入りで記された．上記の記事もその1つであり，ガウス没後に出版された全集の中の「Nachlass zur Elektrodynamik」に掲載されている．

ガウスにとってはいつものことなのであるが，発見の事実は書き留められてはいるものの，その経緯や証明，意味などについては一切触れていないこともあって，メモの内容はガウス以後の数学者の議論の的になったのである．今日では，様々な解釈はあるものの，ガウスの結果の背景には電場・磁場の理論があるという見方で一致している[5,7,9)]．さらに数学史の観点からは，20世紀に発展した結び目（ノット）や絡み目（リンク）の理論の嚆矢と考えられており*3)，位相幾何学的量を解析的量で表現するという問題意識の出発点とも見なされている．

本論説の目的は，ガウスのメモに対する1つの解釈を紹介しながら，ベクトル解析の発祥を促した電磁場の理論についての解説を行うことである．理論の詳細については文献2,5)を参照してほしい．

後の目的のために，古風な表現(1)を現代的な表現で書き直しておこう．

「空間の中の互いに交わらない滑らかな閉曲線を c_1, c_2 とするとき，

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{c_1}\int_{c_2}\frac{1}{\|c_2(t_2)-c_1(t_1)\|^3} \times \det\left(c_2(t_2)-c_1(t_1), \frac{dc_1}{dt_1}, \frac{dc_2}{dt_2}\right)dt_1dt_2 \quad (2)$$

は整数であり，絡み数 $\mathrm{Lk}(c_1, c_2)$ に等しい」

*1) ガウスの弟子リスティングにより topology（位相幾何学）とよばれるようになった幾何学の1分野[3)]．

*2) 日記の存在が明らかになったのは35年後の1899年である．

*3) ノットについては，1794年から興味を持っていたようである．

2. 静電磁場の理論

数学のプリンスとよばれるガウスが活躍した時代は，電場・磁場の理論の揺籃期と重なる．ガウスもこの時代の空気に影響され，電磁気現象に深い興味を持つことになる．

電場に関する歴史を省みると，18 世紀終盤の 1785 年にクーロンが 2 つの電荷の間に働く力の法則を発見，その後「近接作用」の観点からファラデーが電気に関わる物理現象を電気力線（現代的には電場とよばれるベクトル場）を用いて説明したことが事の始まりである．一方磁場についても，クーロンが磁石の両端の磁荷の間に働く力を測定し，電荷の場合と同様な法則が成り立っていることを確認した．

19 世紀の飛躍的発展は，1820 年にエルステッドが電気と磁気がそれぞれ「独立したものではない」ことを実験で確かめたことに端を発する．彼は，導線の側（そば）に磁針を置き，導線に電流を流すと磁針が振れることに気付いたのである．アンペールはこの発見を聞き，直ちに電流間に働く力の研究を開始，今日磁場の言葉で説明されるアンペールの力というものを定式化した．

磁場の物理的意味について簡単に復習しておこう．定常電流が流れる 2 つの導線の間には力が働くが，近接作用の観点では，一方の導線の電流が「場」を作り，この場が他方の導線に作用すると考える．この「場」を（静）磁場という．しかし，力の場として直接定義される電場とは異なり，磁場の定義は間接的である．

実験によれば，磁場の中では導線に働く力は電流の方向に垂直に働く．そこで，この力の方向に垂直な平面内で導線を回転させ，力が最大になったときに，磁場の方向は力の方向と電流の方向双方に垂直になっているとする．図 1 がこの状況を表しているが，電流のベクトル $\boldsymbol{i}$，磁場のベクトル $\boldsymbol{B}$，力のベクトル $\boldsymbol{F}$ は数学で言う右手系となっていることに注意しよう（最終節で触れるように，このことは，磁場が「通常」の意味でのベクトル場ではないことを意味している[5)]）．

では，磁場 $\boldsymbol{B}$ と，これを生じさせているもう 1 つの導線上の電流（改めて $\boldsymbol{i}$ とする）との関係はどのようなものだろうか？ この問に対する答は，ビオとサバールにより与えられた（1820 年）．彼らはエルステッドの発見を聞いた直後に実験を行い，次の法則を見出したのである．

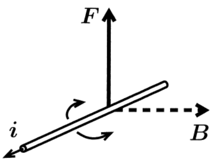


図 1　アンペールの力と磁場．

【ビオ–サバールの法則】 電流密度 $\boldsymbol{i}$ の引き起こす磁場 $\boldsymbol{B}$ は，もし無限遠で $\mathbf{0}$ になるとき，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{y}) \times (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^3} d\boldsymbol{y} \qquad (3)$$

により与えられる．ここで，$\mu_0 > 0$ は**透磁率**とよばれる定数である[*4)]．

第 4 節で，この法則が冒頭で述べた絡み合いの数に対するガウスの公式に関係があることを見る．

3. ガウスの貢献

電磁気現象へのガウスの興味はいつ始まったのだろうか．記録では，地磁気という，当時はミステリアスなものと考えられていた現象への興味は 1806 年に遡る．しかし本格的な研究は 1830 年代になってからである．この間の二十数年間に，彼は地磁気理論のための数学的道具を着実に組み立てていた．

1835 年，ガウスは電荷（密度）ρ と電場 $\boldsymbol{E}$ の間の関係を表す方程式を発見，1867 年に論文として公にした（電場に関するガウスの法則）．微分式の形では，これは $\epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho$ と表される（ϵ_0 は誘電率）．これはクーロンの法則の言い替えであり，さらに次の積分式と同値である．

$$\int_M \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) d\sigma = \epsilon_0^{-1} \int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

ここで，D は $\mathbf{R}^3$ の中の滑らかな境界 M を持つ有界領域とし，$\boldsymbol{n}$ は境界での外向きの単位法ベクトルを表す．実際，微分式と積分式は，次のガウスの発散定理により結び付けられる．

【ガウスの発散定理】 $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場 X に対して $\int_D \operatorname{div} X \, d\boldsymbol{x} = \int_M X \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$ が成り立つ．

*4) 以下，議論を簡単にするため，真空中における電場・磁場を考える．

ガウスはこの積分公式を1813年に得ていた*5).

ガウスの法則 $\epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho$ と，電場がある関数 f を用いて $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} f$ と表されることを意味する方程式 $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ が，（静）電場に対する基本法則である．

ビオ–サバールの法則から，（静）磁場の基本法則である次の微分式が得られる．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{（磁場に対するガウスの法則），}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \quad \text{（アンペールの法則）．}$$

これと電場の基本法則 $\epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ を比較すると，一種の類似性が見られることに注意しよう．他方で，$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ が意味しているのは，磁場は電場と異なり，磁場を作る単一の「磁荷」（磁気単極子）というものが存在しないということである．

磁場の場合に積分式と微分式を結びつけるのには，次のストークスの定理が必要である．

【古典的ストークスの定理】 $\mathbf{R}^3$ の中の滑らかな閉曲線 C で囲まれた向き（表と裏）を持つ曲面を M とするとき，

$$\int_M \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} X \, d\sigma = \int_C X \cdot \boldsymbol{t} ds$$

が成り立つ．ここで，s は C の径数，$\boldsymbol{t}$ は C の速度ベクトル，さらに曲面の表側（単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向かう側）に立って，C にそって進むとき，曲面が常に左側にあるような方向に積分するとする．

ストークスの定理は，最初ケルビン卿により発見され，1850年にストークスに伝えられた．ストークスの名前があるのは，1854年のケンブリッジ大学のスミス賞試験の問題としてこれを課したことによる．

このように，電磁気現象に関わった科学者による様々な発見はその前後関係が入り組んでいることもあり，他の研究者の仕事からガウスがいつどのようにして発想を得たのかを断定することはできない．例えば，1833年の時点でガウスはストークスの定理が主張する内容を既に知っていたのだろうか？ こういう疑問は，ガウスの絡み目に関する結果を見るとき，自然に沸き起こるのである．

*5) 正確には，発散定理はラグランジュにより1762年に発見され，ガウス，グリーン（1825年），オストログラツキー（1831年）によって独立に再発見された．

4. 絡み目と絡み数

本論説の冒頭に掲げたガウスのメモに戻ろう．ガウスが言う「絡み合いの数」とは何だろうか？ 位相幾何学が発展した20世紀前半，その定義は次のように与えられた．

閉曲線 c_2 を境界とする向き付け可能な曲面を M として*6)，c_2 の向きに合わせた向きを M につけておく．さらに曲面 M と 閉曲線 c_1 の交わりを考える（ただし，必要なら c_1 を少しずらして，c_1 が M に接しないようにしておく）．このとき，M と c_1 の有限個の交点において，c_1 の接線ベクトルの向きが表に向かうなら $+1$，裏に向かうなら -1 として符号を定め，全ての交点についてのその符号の和を $\mathrm{Lk}(c_1, c_2)$ とおいて，これを c_1, c_2 の**絡み数**（linking number）とよぶ（$\mathrm{Lk}(c_1, c_2)$ は曲面 M の取り方によらない）*7).

恐らくガウスも，「絡み合いの数」の幾何学的意味をこのように捉えていたと考えられる．

さて，ガウスの式 (2) とビオ–サバールの法則 (3) を較べてみよう．すると，明らかな類似性を見て取ることができる．実際，t_1, t_2 をそれぞれ c_1, c_2 の弧長径数とするとき，c_1 を流れる定常電流 $\boldsymbol{i} = \frac{dc_2}{dt_2}$ が引き起こす磁場は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c_1} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - c_1(t)\|^3} \left(\frac{dc_1}{dt_1} \times (\boldsymbol{x} - c_1(t_1)) \right) dt_1$$

であり，ベクトル積についての公式 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を適用すれば，(2) の右辺は

$$-\mu_0^{-1} \int_{c_2} \boldsymbol{B} \cdot \frac{dc_2}{dt_2} dt_2$$

となる．古典的ストークスの定理を「形式的に」使えば，これは

$$\mu_0^{-1} \int_M \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \, d\sigma = \int_M \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} \, d\sigma \qquad (4)$$

に等しい．必要に応じて M を少し変形すれば，c_1 は M とのすべての交点 $p_1, \ldots, p_n$ で M に直交するようできる．よって，$\operatorname{sgn}(p_i) = \boldsymbol{n}(p_i) \cdot \boldsymbol{i}(p_i)$ と置くと，

$$\operatorname{sgn}(p_i) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{i}(p_i) \text{ が } M \text{ の表側に向かうとき}), \\ -1 & (\boldsymbol{i}(p_i) \text{ が } M \text{ の裏側に向かうとき}) \end{cases}$$

である．$p \in M$ に台を持つ M 上のディラックのデ

*6) このような曲面は存在し，ザイフェルト曲面とよばれる．

*7) 絡み数は，トーラスから球面への写像の写像度を使って定義することができる．

ルタ関数を δ_p により表せば $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(p_i)\delta_{p_i}$ であるから，(4) は $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(p_i)$ となり，これは絡み数 $\mathrm{Lk}(c_1,c_2)$ に等しい．少々粗っぽいが，これがガウスが言明した絡み数の表示式 (2) に対する説明である．

5. マクスウェルの方程式

ガウスの業績から離れて，その後の電場・磁場の理論の発展について簡単に触れよう．

これまで，電場と磁場が時間に依存しない場合を考えてきた．この場合，電場と磁場はそれぞれ独立な基本法則を満たしていたが，時間に依存する場合は，電場と磁場は互いに関連し合い，次のマクスウェルの方程式を満たす．

$$\begin{cases}\epsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})=\rho(t,\boldsymbol{x}),\\ \mu_0^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})-\epsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{i}(t,\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})=0,\\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0.\end{cases}\tag{5}$$

この方程式は，従来の物理学上の基本的観点に大幅な変更を迫ることとなった．すなわち，古典物理学では普遍的な物理法則はガリレイ変換に対して不変でなければならないが，マクスウェルの方程式はこの要請を満たさないのである．

もう1つの問題点がある．前に「磁場は単なるベクトル場ではない」と述べた．磁場の方向を決めるのに，右手系を使ったことを思い出そう．実は，人間の手を使った右手系，左手系を数学的に特徴付けることは不可能である．また，アンペールの力を鏡に写すと，右手系は左手系に写るから，鏡の中では磁場を表すベクトルの方向は逆向きにならなければならない．このようなベクトルを軸性ベクトルという（通常のベクトルは極性ベクトルとよばれる）．

実は，軸性ベクトルといったような「人工的」定義を避ける方法がある．微分形式の概念を使うのである．これを簡単に説明しよう．以下述べることは，曲面の一般化である多様体でも意味があり，しかも大域的な定式化が可能である．

（局所）座標系 $(u_1,\ldots,u_n)$ に対して，記号 $du_1,\ldots,du_n$ を導入し，$(u_1,\ldots,u_n)$ の滑らかな関数を係数としてこれらにより生成される代数を考える．ただし，積は $\wedge$ により表し，関係 $(du_i\wedge du_j)\wedge du_k=du_i\wedge(du_j\wedge du_k)$, $du_i\wedge du_j=-du_j\wedge du_i$ を満たすものとする．

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\ldots i_p}(u_1,\ldots,u_n)du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_p}$$

と表される元を p 次微分形式という．さらに

$$d\omega=\sum_{i}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\ldots i_p}}{\partial u_i}du_i\wedge du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_p}$$

と置いて，ω の外微分という．ガウスの発散定理，古典的ストークスの定理は，この外微分と微分形式の積分を使って統一化されるが，これについては省略しよう[5]．

さて，電場 $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,E_3)$，磁場 $\boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)$ および電流密度 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,i_3)$ を使って，時空の座標 (x_1,x_2,x_3,t) を用いた2次の微分形式

$$\begin{aligned}\Omega\;=\;&B_3dx_1\wedge dx_2+B_1dx_2\wedge dx_3+B_2dx_3\wedge dx_1\\&+E_1dx_1\wedge dt+E_2dx_2\wedge dt+E_3dx_3\wedge dt\end{aligned}$$

と1次の微分形式 η を $\eta=\mu_0(i_1dx_1+i_2dx_2+i_3dx_3)-\epsilon_0^{-1}\rho dt$ により定義する．Ω は電磁場を表す量である．こうすれば，マクスウェルの方程式はミンコフスキー時空における方程式 $d\Omega=0$, $d^*\Omega=\eta$ として表される（d^* はミンコフスキー内積に関する d の共役作用素である）．これはまさにミンコフスキー時空こそが物理的に正当な時空であるという，アインシュタインが構築した特殊相対論の主張を意味しているのである[5]．

参考文献

1) 高瀬正仁訳・解説，『ガウスの《数学日記》』日本評論社，2013 年．
2) 砂川重信，『電磁気学』岩波書店，1977 年．
3) 砂田利一，『現代幾何学への道—ユークリッドが蒔いた種—』岩波書店，2010 年．
4) 砂田利一，『曲面の幾何』岩波書店，2004 年．
5) 砂田利一，『数の理 物の理』全 5 巻，岩波書店，2004～2005 年．
6) 高木貞一，『近世数学史談』岩波書店，1995 年．
7) 深谷賢治，『電磁場とベクトル解析』岩波書店，2004 年．
8) 山本義隆，『磁力と重力の発見 3 近代の始まり』みすず書房，2003 年．
9) R.L. Ricca and B. Nipoti, Gauss' linking number revisited, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, Vol.**20**, No.10 (2011), 1325–1343.

（すなだ・としかず，明治大学総合数理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

登坂 宣好

1984年8月号

本誌の234号「境界要素法」(1982年12月号)では，従来の領域型の数値計算手法と比べて境界型という特徴を備えた新解法の特徴・原理等を取り上げた．この境界要素法が，有効な数値計算手法と認められるには，主として「線形問題」への適用性から様々な問題への進展が図られなければならない．そこで，様々な問題，特に非定常問題と非線形問題へのチャレンジに対する1年8カ月の経過における成果を問うべく，この254号「境界要素法の新展開」を企画した．



その趣旨は，「境界要素法が有力な数値計算手法としての評価を得るためには，その適用性を単に線型問題に限定することなく，非定常問題や非線型問題という複雑で広汎な問題に対しても進展して行かなければならない」という強い問題意識と熱意に対する研究者および技術者の取組みによる目覚しい発展と成果の現状を紹介しようとしたことである．

234号の回顧（本誌2012年12月号掲載の本コーナー）では，非定常問題および非線型問題に対する適用性の進展として，それらの問題の積分方程式による定式化で必然的に内在する領域内部の未知量に対する境界未知量への変換技法として「多重相反手法」が開発されたことを述べた．この手法は，境界要素法は文字通りあくまでも境界型解法であることにこだわり，そのこだわりを支える手法である．ただし，この手法については，234号では触れられていない．なお，この手法が開発されたが，非線型問題への適用性について十分な研究が進展したとは言えないのが現状である．

本号では，234号の結果として境界要素法に注目が集められて，1年8カ月という短期間での目覚しい進展ぶりをレヴューすることができた．しかし，あの頃の研究者および技術者の境界要素法に対する熱い眼差しはどこに行ったのだろうか．まさに“あれから30年”である．

境界要素法は，文字通りあくまでも「境界型」解法でなければならないという宿命を背負わされた．すなわち，境界要素法は，これまでの差分法や有限要素法と比べて境界型であることが特徴として注目され評価されたのである．一方，数値計算手法は，多種多様な問題への適用性が問われ，その適用性が限定的であることがわかるとその評価は低い．現在，過去に注がれた熱い眼差しを感じられるような評価ではない．そこで，境界要素法は，積分方程式の要素概念を用いた数値計算法であるという234，254号で筆者が主張した立場に徹して，高精度の数値解が得られる等を特徴として示してゆくべきである．

最後に，境界要素法の強力な推進者でこの特集の内容を共に企画した故信州大学教授・田中正隆先生のご冥福をお祈りする．

（とさか・のぶよし，東京電機大学未来科学部）

リレー連載
フィールズ賞で語る現代数学
第1回

フィールズ賞で語る現代数学

河東 泰之

1. はじめに

よく知られている通りノーベル数学賞というものはない．この理由についてはいろいろなことが言われているが，ノーベルと，当時スウェーデンの代表的数学者であったミッタク・レフラーの不仲を原因の一つとするものが多いようである．いずれにせよ，そのかわりにフィールズ賞が数学界最高の賞として知られており，しばしば「数学のノーベル賞」と言われてきた．巨額の賞金を出すアーベル賞ができてからも，フィールズ賞の権威にはあまり影響がないようである．40歳以下という年齢制限があるにも関わらず，新人賞的な位置づけではなく，最高権威の賞ということになることができた理由の一つはもちろん，最高レベルの数学が若い数学者によって築かれてきたからである．歴史的大予想の解決や，革命的理論の創始の多くが若手数学者によることは数学の学問的特質と言ってよいだろう．大学にいて他の学科や学部を見ていると，数学では若い人が高い扱いを受けていることが他分野よりずっと多いことに気づく．さらにそれに加えて，偉大な業績が出たときにあまり時間をおかずに賞を与えてきたこと，受賞者がその後長く，最高レベルで活躍する例が多かったことも権威を作るのに大きな役割をはたしてきたと言えるだろう（ノーベル賞の受賞対象業績は何十年も前のものであることが少なくないのと対照的である）．この連載ではフィールズ賞の各受賞者を分野ごとに取り上げ，その業績や人となりについて順に専門家に解説していただくことになっている．これによって現代数学が発展してきた様子が浮かび上がるものと期待している．

フィールズ賞は4年に一度の国際数学者会議（ICM）で授与され，今年がそれにあたっている．私が初めて生で授賞式を見たのはUCLAで院生をしていた，1986年のバークレーでの国際数学者会議であった．ドナルドソン，ファルティングス，フリードマンの3人が受賞者で，「ああ，3人とも名前を知っている人だ」と思ったことを覚えている．いきなり少し脱線だが，ノーベル賞はとても昔の業績で取ることがあることと，決定即発表なので誰がもらうのかを当てるのは難しいのに対し，フィールズ賞は年齢制限で候補が絞られることと，誰が見ても明らかな大本命がいることが少なくないこと，およびその年の春頃に受賞者は決定しており，少なからぬ数の関係者が知っていることから，受賞者に関する噂はかなりよく当たる．1990年の京都のときは，「森教授受賞」の新聞記事が正式発表よりずっと前に出たことと，日本数学会は私にジョーンズ受賞業績紹介原稿を書くようにと

いう依頼をかなり前に送ってきたことを覚えている．なお2010年のフィールズ賞受賞者ヴィラーニは一般向けの著書『定理が生まれる』(早川書房，2014）の中で，2010年2月16日にフィールズ賞の決定通知を受けたこと，秘密にしろと言われたのでそれを守って妻にしか言わなかったということを書いている．

2. フィールズ賞とは

さてあらためてフィールズ賞のおおもとに立ち返ってみると，フィールズ賞を出しているのは国際数学連合（IMU）である．国際数学連合は4年に一度の国際数学者会議を主催しているが，1924年の国際数学者会議がカナダのトロントで開かれ，その際の責任者であったフィールズが新しい賞を作ろうとした．彼の遺志に基づいてできたのがフィールズ賞であり，彼の名前がついている（カナダにあるフィールズ研究所も同じく彼の名前に基づいているが，フィールズ賞とは直接関係はない．フィールズ賞が有名になったあと，それにあやかって名前を付けたものと思われる）．なお日本語では「フィールズ賞」と言っているが，英語名称はFields prizeではなくFields medalである．第1回のフィールズ賞は1936年に与えられたが，その後第2次世界大戦による長い中断があり，再開されたのは1950年である．それからはきちんと4年おきに国際数学者会議の際に与えられている．受賞者の数は当初2名だったが，1966年に2～4名という規則になって現在に至っており，できるだけ4名に出すという方針とのことである．ノーベル賞は各賞1回3人までとなっており，理科系の3賞は毎回それぞれ2～3人に出るのが普通であるのと比べると人数は少なめである．賞金は15,000カナダドル（百数十万円）となっており，ノーベル賞を初めとする他の有名な賞と比べると桁違いに少ないが，数学界においては最高の格を維持している．

年齢制限の正確な内容はその年に40歳になる人までが受賞資格があるというものである．フェルマーの最終定理を証明したワイルズがこの年齢制限に引っかかったため受賞できなかったが，かわりに国際数学連合から特別表彰を受けたことは有名である．フィールズ賞授賞式で同時に授賞され，フィールズ賞と同格，あるいはもっと偉いものとして扱われた．フィールズ賞は4年に一度しか回ってこないことから，年齢の回り合わせの悪い人にとっては37歳が受賞のリミットということになり，大変厳しい制限である．シュラムなどこの年齢制限のためにもらい損ねたと考えられる人もいるが，他はなぜかうまくぎりぎりで収まっている感が強く，決定的な大業績があるのに年齢制限に引っかかったのはワイルズだけであるように思う．受賞を拒否して話題となったペレルマンも，最初ポアンカレ予想解決の報のときは年齢はどうなのかという話題があったがぎりぎり40歳であった．

受賞者には金メダルが与えられる．アルキメデスの肖像が片面にあり，受賞者の名前は細い縁に刻んである．ジョーンズが1990年に受賞したときに見せてもらったが，中央部が分厚く，縁に行くにしたがって薄くなり，どら焼きのような形だと思ったことを覚えている．なおジョーンズは京都で開かれた受賞記念パーティーのときは，このメダルを空中に放り投げて遊んでいた．彼は授賞式の朝会ったときに普段していないネクタイをしており，さすがに今日はネクタイなんだ，と思ったが授賞式が終わるやすぐにはずしてしまっていた．

授賞式は国際数学者会議の冒頭に行われる．京都で行われたときは日本の文部大臣が来たが，もっと国家元首級が来ることもあり，2002年に北京で行われた際には当時の江沢民国家主席がフィールズ賞を授与した．今年のソウルのプログラムを見ると，フィールズ賞業績紹介とフィールズ賞受賞者の講演枠が既に4つずつ確保されている．受賞者の一部は，プログラムが既に決まっている全体講演者（1時間）と重なっているのではないかという気もするが，一応最大限に枠を取ってあるのであろう．フィールズ賞受賞者がその国際数学者会議での招待講演者ではない場合はフィールズ賞受賞講演としてプログラムの中で行われることに

なっているからである．なお招待講演とフィールズ賞は別々の委員会が選ぶ別のものだが，実際上フィールズ賞を取るような人が招待講演をしていないということはないと思われる．ただし前回以前の国際数学者会議で招待講演を行っていてその回の招待講演者に入っていないことはあるので，そのような場合にこのケースが起こる．前々回受賞者の某氏は最初，今回は招待されていないので国際数学者会議には行かないと言っていたが急に春頃うれしそうに，やっぱり行くことにしたと言っていたということである．

さてその選考委員会だが，国際数学連合が毎回選ぶことになっている．委員長は自動的に国際数学連合総裁であり，今回はウェーブレットで有名なドブシーである．他のメンバーはフィールズ賞発表時に公表されるので現在はまだわかっていない．日本人は一時毎回のように入っていたのだが，前回，前々回と入っていなかった．なお第1回フィールズ賞の選考委員会には高木貞治が入っていた．これまでの全委員のリストは http://www.mathunion.org/general/prizes/prize-committee-chairs/2006-1936/ で見ることができる．1994年の際は国際数学連合総裁は J-L. リオンであったが，息子のP-L. リオンがフィールズ賞候補になったので委員長は交代し，息子のリオンは実際に受賞した．なお各国の数学会に候補を推薦する権限があるが，それとは別に誰でも候補を推薦することができる．この意味で「フィールズ賞候補」になるだけならとても簡単である．

3. 国別，分野別の概観

各受賞者とその業績についてはこれからの連載で詳しく取り上げていただくことになるが，ここでは簡単に概観してみよう．

受賞者を国別にみると，受賞者の多い順にアメリカ，フランス，ロシア（旧ソ連時代を含む）となっている．アメリカが多いのはもっともとして，フランスの強さは特筆に値する．ガウス，リーマン，ヒルベルトなどでわかるように，昔はドイツが世界最高水準を誇っていた時代もあったのだが，今はフランスのほうがずっと強い．なお，世間一般ではドイツのほうが科学技術の国で，フランスは文化や芸術の国と言う印象が強く，大学の第2外国語も理系はドイツ語のほうが選択者がずっと多いのだが，数学で役に立つのはフランス語のほうである．ドイツ語で書かれた数学論文は現在めったに見ないが，フランス語で論文を書く大物数学者は現在もいる．フィールズ賞受賞者で言えばラフォルグがそうである．フランス人は冗談で，フィールズ賞にはフランス人枠があるんだというくらいである．グロタンディークは活躍の主舞台はフランスだったが無国籍であったので，普通フランスのカウントに入れない．高等師範学校（ENS）がフランス数学を代表するエリート校とされており，前に同校出身者の推薦状を見たことがあるが，本人の説明より先に，わが校こそフランスの全フィールズ賞受賞者を輩出した名門校である，という自慢が先に書いてあった．今でもおそらく全員が同校出身者のはずである．

ノーベル賞よりずっと全体数が少ないので，日本の受賞者3名（小平，広中，森）はまあまあの数字だが，1990年以来縁がないのは残念なところである．日本は20年に一度しか取れないなどと前は言われていたものだが，もう20年以上前回の受賞から過ぎてしまっている．

ロシアは旧ソ連時代から高い研究水準を誇っており，多くのフィールズ賞受賞者を出しているが，これら受賞者を含む大半の大物数学者は欧米に「脱出」してしまっており，特にアメリカ在住者が多い．

ドイツは上に書いたように20世紀前半までの栄光と比べるとさびしい現状で，ファルティングス1人しか受賞者はいない．なおウェルナーもドイツ出身であるが，子供のころにフランスに移住して受賞時も現在もフランス国籍である．

中国系はヤウとタオの2人だが，タオはオーストラリアで生まれ育っていて国籍もオーストラリアなので中国にはカウントされない．ヤウはアメリカ国籍を取っているようだが普通，中国でただ1人のフィールズ賞受賞者と言われている．

その他にフィールズ密度という冗談があって，人口当たりのフィールズ賞受賞者の数のことである．ジョーンズ1人のためにニュージーランドが最高という話をだいぶ前に聞いたのだが，今私がざっと調べてみたところでは，今でもニュージーランドが最高密度のようである．もちろん単に人口が少ないからこうなるのであるが．なおジョーンズはニュージーランドではフィールズ賞を受賞したことにより勲章をもらっており，これによってサーの称号を得ている．

分野で見ると多いのは，整数論，代数幾何，トポロジー，微分方程式などである．私の専門の作用素環論はコンヌ，ジョーンズの2人だけだが，研究者人口を考えればそれなりに良い数字である．表現論は大きな分野のはずだが，なぜか純粋に表現論の業績でフィールズ賞を取った人はいない．確率論も最近までゼロと言われていたのだが，ウェルナーが取り，スミルノフもかなり確率論である．なおウェルナーは何かのインタビューで，若い頃に確率論などやってもフィールズ賞は取れないからやめておけと言われたと語っていた．

国ごとに得意な分野というものがあり，受賞者の業績リストを見ていると，日本ではあまり研究されていないような分野の人も少なくない．例えばガワーズはバナッハ空間の研究で受賞したが，日本ではあまり研究されていないテーマである．

4. いくつかの話題

さてフィールズ賞の歴史の中で最大の事件と言えばやはり，ペレルマンの受賞辞退（というか拒否）であろう．もちろんこれまで他に授賞を拒否した人はいない（ノーベル賞の理科系3賞でも受賞を拒否した人はこれまでいない）．彼が今どこで何をしているのかよくわからないが，完全に孤立した中で長期間超難問に挑んだ姿は感動的である．彼は若い頃にカリフォルニア大学バークレー校のポスドク研究員ミラー・フェローというものをしており，その際の給料の一部をためてロシアに帰ったと言うことである．アメリカではポスドクの給料の一部でもロシアに持ち帰れば巨大な金額になるのでこれで暮らしていたと言われている（ロシアでも研究所に勤めていたが経済が破たんしておりその給料は微々たるものだったということだ）．実際インターネットにポストされたポアンカレ予想解決の論文では何年も前のものだったミラー・フェローシップへの感謝が書かれている．私はこのミラー・フェローのポストに1991～1993年の予定でついていて，日本側の都合により1992年にやめて帰ったのだが，ペレルマンはこのポストに私の後の1993年からついていたのである．

フィールズ賞の年齢制限は40歳とはいえ，さらに若くしてとる人もいる．これまでの最年少記録はセールの27歳（1954年）である．50年以上前の記録だが今も破られていない．最初は代数トポロジーなどを研究しており，整数論の著名な業績はフィールズ賞の後のものである．アーベル賞も初回のものを受賞しており，現代数学を体現する巨人であると言えよう．

もちろんフィールズ賞は数学の賞であり，基本的にいわゆる純粋数学だけを対象にしているが，一度だけ通常の枠からはみ出たことがある．言うまでもなく1990年のウィッテンである．彼は物理学者であり，厳密な定理を証明するという通常の純粋数学からは外れている．彼が実際に受賞する前に，彼が今度のフィールズ賞だという噂が広く流れていたのだが，その当時は「そんなはずはない」と思ったことを記憶している．しかしその後純粋数学へ彼の考え方が与えたインパクトは絶大なので，「ウィッテンは数学者ではない」という反発はだいぶ薄れたように思う．フィールズ賞の直接の対象となった，ジョーンズ多項式のチャーン・サイモンズ理論に基づくフォーミュレーションは1988年にイギリス・スワンジーのレストランで，やはりフィールズ賞教授のアティヤらと食事していた際に思いついたものと言われている．私はこのレストランで何度か食事したことがあるのだが，最近ではつぶれてしまったと聞いており残念である．

2010年受賞者のヴィラーニは最初にも引用した

一般向けの著書『定理が生まれる』のおかげでフランスでは世間一般でも大変知名度が高いそうである．この本は『私がフィールズ賞をもらうまで』という題名にしてもよいような内容で大変興味深い．共同研究者との専門的なメールがそのまま引用されていたり，複雑な数式が何ページも続いていたりするのも普通ではなく斬新である．その一方で彼が，『ブラック・ジャック』，『DEATH NOTE』，『ベルサイユのばら』などを見ていることもわかって興味深い．彼はいつもカラーの蜘蛛のブローチをしており，これは色違いのものをいくつも持っているのだということである．まさにこの原稿を書いている際に，著書の日本語版出版記念ということで来日し，東大でも講演を行ったが，大変見事な講演であった．

2006年の受賞者のタオは普通の人が考える「頭のいい数学者」というものを極限まで推し進めたような人である．10歳で数学オリンピック出場，12歳で同金メダル獲得，19歳でプリンストン大学博士など，天才伝説には事欠かない．とてつもない勢いで本や論文を書いており，そのレベルの高さ，量の多さ，幅の広さはまさに超人的である．基本は解析が専門のはずだが関連するあらゆる分野で大活躍しており，もはや狭い意味での専門などは何なのかわからないくらいである．私が彼の講演を聞いたのは韓国で開かれた，アメリカ数学会・韓国数学会合同会合の1回だけであるがその際の話はペレルマンによるポアンカレ予想解決についてであった．行きも帰りもほとんど飛行場直行のようなスケジュールだったそうで，これも超人的な話である．ブログ（http://terrytao.wordpress.com/）もやっており，全くの素人の質問などにも答えているのも驚異的である．

日本では数学者の数学内での専門は固定しているのが普通だが，フィールズ賞受賞者の中には大きく変えている人も何人かいる．上述のセールもかなり純粋数学の中で方向を変えているが，コーエンは最初にやっていたのは調和解析であった．あるとき突然公理的集合論を始めて連続体仮説の独立性を証明したのである．

年齢制限もあり，フィールズ賞は名のある大予想を解いたと言ったわかりやすい業績に偏っており，全く新しいことを始めてじわじわと重要度がわかっていくと言った場合にはもらえないという批判もある．一般に数学での評価が技術的な完成に重きを置きすぎているというのはたぶん本当である．例えば，全くよくわかっていない現象があり，Aがそれについて斬新な仮説を出したが実証できず，Bがそれを実証する方法の基礎を築き上げ，最後にCがそれを使って完全に実証した，といった展開をたどるケースはどの科学でもよくあるが，数学での評価はCに対するものが圧倒的に高いのが普通である．ノーベル賞ならばこのようなケースでAの人がもらえることはほぼ確実で，Bの人にもチャンスがあるのと対照的である．そのように全く新しいことを始めたためにフィールズ賞をもらい損ねた例としてよく挙がるのがグロモフである．そのかわりにというべきか，彼はウルフ賞，京都賞その他の賞を総なめにして長老に出すことが大半のアーベル賞も比較的若めの年齢で受賞している．

以上かなり雑談的な記事になってしまったが，最後に本当の雑談で終わりにする．カリフォルニア大学バークレー校では駐車場の確保が困難であり，値段も高いのだが，ノーベル賞教授はただで一番いい場所に専用駐車場をもらうことができる．駐車許可証はpermitと言い，教員用，職員用，学生用などいろいろあるのだがノーベル賞受賞者のものはNobel permitと呼ばれており，物理学科や化学科に行くとこれを付けた車を見ることができる．数学科がフィールズ賞も同等に扱われるべきだ，と強く主張して認められ，フィールズ賞教授たちも専用駐車場をもらえることになったのだが，ジョーンズ（現在はバンダービルト大学に移籍）がもらった際は，専用駐車場の銘板の彼のファーストネーム（Vaughan）のつづりが間違っていたのだった．ずっと間違ったまま気にせず使っていたのだと思う．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

微分方程式を考える

第2回 数学は現象をいかに記述しているか

力とベクトル場

小 澤 徹

力学や微分方程式の基礎概念であるベクトルおよびベクトル場について，その定義を巡る考察から始め，ベクトル空間，アフィン空間，ノルム空間，内積空間，バナッハ空間，ヒルベルト空間を導入し，今後の議論の基礎としよう．

2.1 ベクトルとは何か

高等学校の数学では，ベクトルとは「大きさと向きを持つ有向線分」であり「2つの有向線分は，それぞれの視点と終点が平行移動で一致すれば同じベクトルとみなす」ものと学ぶ．しかし，「向き」の定義や「同じものとみなす」妥当性の根拠を明確にしない限り，この定義は意味をなさない．高等学校の物理では，「大きさと向きを持つ量」と習うが，「量」の定義が与えられないままではますます混乱するばかりである．大学の基礎科目である線形代数では，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の元として n 次元数ベクトルが定義される．この定義は明確な意味を持つが，こうするとすべてのベクトルの「始点」は常に原点となってしまう．$\mathbb{R}^n$ の原点は唯一つであり，平行移動の概念が（そのままでは）入らないので古典力学を論じるには余りにも不便である．時間軸 $\mathbb{R}$ を加えた $(1+n)$ 次元時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は初期時刻と世界の中心が常に固定されており，天動説的世界観（アリストテレス時空）の立場を取っていることになる．二次関数を $y = ax^2$ の形でしか教えないのは，天動説しか教えないことに相当する．

ベクトルを「直交変換による座標系の回転に対し，共変的に変換される（単一添字を伴う）量の組」とする考え方もある．この方式によれば「直交変換による座標系の回転に対し，不変量がスカラーであり，共変的に変換される（複数添字を伴う）量の組がテンソル」ということになる．物理では馴染み深い捉え方である．しかし，この方式では，スカラーがベクトルかテンソルかは「いちいち変換してみないと量の特性が判別できない」ことになってしまう．また，

添字集合の個数が，対象とする空間の次元に相当するが，「無限次元のベクトル」の定義には，無限級数の収束性を吟味する必要も出てきてしまう．この方式では，対象とする空間は陰に隠れたように見えるが，依然としてユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ であり，上で指摘した問題に対して解答を与えているわけではない．

そこで，「ベクトル」として認識された初期の例，即ち，速度（velocity），加速度（acceleration），力（force）の基本的性質に立ち戻って考えてみよう．これらには次の共通の性質が観察される：

(i)　合成と分解を考えることができる．

(ii)　同じ方向（または反対方向）への働きに強弱を付けて考えることができる．

上の性質 (i) はベクトルの算法として和（addition）が定義されていることが前提であり，性質 (ii) はベクトルのスカラー倍（scalar multiplication）が定義されていることが前提である．この 2 つの算法に注目し公理化したものがベクトル空間の定義である．

2.2 ベクトル空間の定義

定義 2.1　集合 V が体 $\mathbb{K}$（実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$）上のベクトル空間であるとは

$$\text{ベクトルの和}\quad V \times V \ni (x, y) \mapsto x + y \in V,$$

$$\text{ベクトルのスカラー倍}\quad \mathbb{K} \times V \ni (a, x) \mapsto ax \in V$$

が次の (1)–(8) を満たすように定義されていることをいう：

(1)　任意の $x, y \in V$ に対し　$x + y = y + x$.

(2)　任意の $x, y, z \in V$ に対し　$(x + y) + z = x + (y + z)$.

(3)　任意の $x \in V$ に対し　$x + 0 = x$ を満たす元 $0 \in V$ が存在する．

(4)　任意の $x \in V$ に対し　$x + y = 0$ を満たす $y \in V$ が存在する．

(5)　任意の $a \in \mathbb{K}$ および任意の $x, y \in V$ に対し　$a(x + y) = ax + ay$.

(6)　任意の $a, b \in \mathbb{K}$ および任意の $x \in V$ に対し　$(a + b)x = ax + bx$.

(7)　任意の $a, b \in \mathbb{K}$ および任意の $x \in V$ に対し　$(ab)x = a(bx)$.

(8)　任意の $x \in V$ に対し　$1x = x$.

定義 2.2　ベクトル空間の元を**ベクトル**という．

以上が現在世界共通に用いられているベクトル空間の定義である．この公理論的体系の原型を初めて与えたのはペアノ（Giuseppe Peano, 1858–1932）で 1888 年のことである．上の性質 (1)–(8) は次のように言い表すことができる：

(1)　**（和の可換則）**　ベクトルの和の算法は可換（commutative）.

(2)　**（和の結合則）**　ベクトルの和の算法は結合的（associative）.

(3)　**（零元の存在）**　ベクトルの和の算法に関する零元（zero element）の存在．

(4)　**（和に関する逆元の存在）**　ベクトルの和の算法に関する逆元（inverse element）の存在．

(5)　**（分配則）**　ベクトルの和に関してスカラー倍は分配的（distributive）.

(6) **（分配則）** 一つのベクトルに対するスカラー倍の和は分配的．

(7) **（スカラー倍の両立性）** 一つのベクトルに対するスカラー倍はスカラーの積と両立的（compatible）．

(8) **（1 の作用）** 1 によるスカラー倍は恒等写像（identity）として作用する．

これらの性質から，零元の一意性と（与えられた元に対する）逆元の一意性が導かれる．$x \in V$ に対する逆元を $-x$ と表す．また $x + (-y)$ を $x - y$ と表す．以上で，通常のベクトル算法が確固とした基盤を持つこととなる．

さて，ベクトルとは何かという問題を巡って前節で議論を喚起したが，上の定義では，**構造の与えられた空間**，即ち和とスカラー倍が両立するような演算を可能とする（即ち線形構造を持つ）集合としてベクトル空間がまず規定され，その構成員として初めてベクトルが意味をなしていることに注目すべきである．考察の対象を，一つ一つの個性ではなく**全体集合とその構造**（内部を支配する法則）を出発点に置いているのである．構成員が，所属団体を明らかにして初めて個別認識されるという事情は，実社会でも観察される現象である．当然ながら，同じ集合 V に対しても演算やスカラー体が異なれば，ベクトル空間としては異なるものになる．特に，複素数体 $\mathbb{C}$ を係数体として考えていたベクトル空間を実数体 $\mathbb{R}$ を係数体として取り直す場合，ベクトル空間としては別の空間として取り扱うこととなるので注意が必要である．

2.3 構造と力

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ として，前節で与えられたベクトル空間の定義をニュートン力学的に解釈してみよう．即ち，力はベクトル（=ベクトル空間の元）とみなし，定義にある性質 (1)–(8) をニュートン力学的に捉え直してみよう．

まず「ベクトルの和が定義できる」とは「力は合成できる」ということであり，「ベクトルのスカラー倍が定義できる」とは「力は同一（または反対）方向に強弱を付けることができる」ということと置き換えてみよう．ここで同一方向の強弱とは $a > 0$ を掛けることであり反対方向の強弱とは $a < 0$ を掛けることと理解される．これらの理解の下で，性質 (1)–(8) は次のように解釈される：

(1) **（和の可換則）** 2 つの力の合成は，順序に依存しない．

(2) **（和の結合則）** 3 つの力の合成は，順序や組合せに依存しない．

(3) **（零元の存在）** 作用点および作用点において力の働いていない状態の存在．

(4) **（和に関する逆元の存在）** 反作用の存在（作用・反作用の法則）．

(5) **（分配則）** 力の合成に関する強弱の分配則（合成された力のスカラー倍は，スカラー倍された力の合成に等しい）．

(6) **（分配則）** 同一の力に対する強弱の和の分配則（一つの力に対して 2 つのスカラーの和をスカラー倍にした力は，それぞれスカラー倍した力の合成に等しい）．

(7) **（スカラー倍の両立性）** 同一の力に対する強弱の積の両立性（一つの力に対して 2 つのスカラーの積をスカラー倍した力は，スカラー倍を繰り返した力に等しい）．

(8)　**(1 の作用)**　力の 1 倍は元の力に等しい．

以上が，構造（structure）という視点から捉えた力の姿である．力のなす空間を設定し，線形構造を与えた途端，力の概念が強く規定されてしまう様子が分かる．特に，(3) と (4) はニュートン力学における運動法則に立ち入っており，極めて興味深い．また (6) は，与えられた力に対して倍返しを実行しても（$f - 2f = -f$ であるから）同じ力を返しただけという現実を記述する．

2.4 アフィン空間を平行移動による同値類で割った商空間として構成されるベクトル空間とその同型

この節では「有向線分」の概念と 2 つの有向線分を「同じとみなす」方法について，アフィン空間の枠組みから整理し，ベクトル空間との関連を論じよう．

定義 2.3　空でない集合 X，係数体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対し，次の 2 つの条件を満たす X から X への写像の族 $\{\tau_v; v \in V\}$ が与えられているとき X は V を基準ベクトル空間とする**アフィン空間**（アフファイン空間，亜真空間）という．

(A1)　**(並進群の表現)**　任意の $u, v \in V$ に対して $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$.

(A2)　**(平行移動を実現するベクトルの存在)**　任意の $p, q \in X$ に対して唯一つの $v \in V$ が存在して $\tau_v(p) = q$.

一つのベクトル $v \in V$ に対する写像 $\tau_v : X \to X$ は，X の点 p を v だけ平行移動させた点に写す役割をもつ．条件 (A1), (A2) より，任意の $v \in V$ に対し τ_v は X から X への全単射であり $0 \in V$ に対する τ_0 は恒等写像であることが従う．(A2) で与えられる v を $q - p$ と表す．X には減法は導入されていないが，その「差」$q - p$ は V の元 v として定まる：$q - p = v \in V$．また $\tau_v(p)$ を $p + v$ と表す．X には V との加法は導入されていないが，$p \in X$ の $v \in V$ による「平行移動」$p + v$ は X の元 $\tau_v(p)$ として定まる：$p + v = \tau_v(p) \in X$．この記法に従えば，$q = \tau_v(p)$ なる関係は

$$q = p + (q - p), \quad (p + (q - p)) - p = q - p$$

と表される．また，任意の $p, q, r \in X$ に対し次の関係が成立する．

(1)　**(平行移動とその逆)**　$-(q - p) = p - q$.

(2)　**(二点の相等)**　$p = q \iff p - q = q - p = 0$.

(3)　**(シャールの関係式)**　$(p - q) + (q - r) + (r - p) = 0$.

2 つの点 $p, q \in X$ に対し，写像 $\gamma_{p,q} : [0, 1] \to X$ が

$$\gamma_{p,q}(t) = p + t(q - p) = \tau_{t(q-p)}(q) = \tau_{tv}(q), \quad t \in [0, 1]$$

で定まる．ここに $v = q - p$ とする．写像 $\gamma_{p,q}$ を p を始点，q を終点とする X の**有向線分**と定義する．ここで「向き」の概念が，$\mathbb{R}$ における順序関係によって，自然に導入されていることに注意されたい．「向き」を表現する対立概念として「右と左」（座標系），「上と下」（スピン），「正と負」（基底変換あるいは座標系の変換の行列の行列式の符号）等が用いられるが，結局は $\mathbb{R}$ における

順序構造，さらには単なる符号 ± 1 に帰着されてしまうものである．

さて，X の有向線分全体のなす集合を Γ とし，$p \in X$ を始点とする有向線分全体のなす集合を Γ_p とする：

$$\Gamma = \{\gamma_{p,q} : [0,1] \to X;\ \ p, q \in X\},\ \ \Gamma_p = \{\gamma_{p,q} : [0,1] \to X;\ \ p \in X\}.$$

Γ_p に和およびスカラー倍を

$$\gamma_{p,q} + \gamma_{p,q'} = \gamma_{p,q+(q-p)+(q'-p)},\quad a\gamma_{p,q} = \gamma_{p,p+a(q-p)},$$

で定めると Γ_p はベクトル空間をなすことが確かめられる．和に関する零元は $\gamma_{p,p}$ であり $\gamma_{p,q}$ の逆元は $(-1)\gamma_{p,q} = \gamma_{p,p+(-1)(q-p)}$ で与えられる．ベクトル空間 Γ_p の元を，点 p を始点とする**束縛ベクトル**という．束縛ベクトルの空間 Γ_p と基準ベクトル空間 V との関係は次で与えられる：

命題 2.1 p を始点とする束縛ベクトル $\gamma_{p,q} \in \Gamma_p$ に対し

$$T_p(\gamma_{p,q}) = q - p \in V$$

と置いて定まる写像 $T_p : \Gamma_p \to V$ は線形同型写像（即ち線形全単射）である．

これで，一点 $p \in X$ を固定する限り，束縛ベクトルのなすベクトル空間と基準ベクトル空間はベクトル空間として同型であることが分かった．次に，（始点を固定しない）有向線分全体のなす集合 Γ に**同値関係による構造**を導入し，基準ベクトル空間との関係を命題の形で与えよう．

命題 2.2 Γ の 2 つの元 $\gamma_{p,q}, \gamma_{p',q'}$ に対し，関係 $\sim$ を

$$\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} q - p = q' - p'$$

と定めると，$\sim$ は同値関係となる．即ち

- **（反射律）** $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p,q}$,
- **（対称律）** $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'} \Longrightarrow \gamma_{p',q'} \sim \gamma_{p,q}$,
- **（推移律）** $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'}, \gamma_{p',q'} \sim \gamma_{p'',q''} \Longrightarrow \gamma_{p,q} \sim \gamma_{p'',q''}$

が成立する．Γ を同値関係 $\sim$ で割った商集合を W とする：$W = \Gamma/\sim$. $\gamma_{p,q}$ の属す同値類を $[\gamma_{p,q}] \in W$ と表すと，終点と始点との差 $q - p$ は同値類の代表元の取り方によらず V の元として定まる．これにより定まる写像

$$T : W \ni [\gamma_{p,q}] \mapsto q - p \in V$$

は全単射となる．W に和とスカラー倍を，V から T により誘導する：

$$[\gamma_{p,q}] + [\gamma_{p',q'}] = T^{-1}((q-p) + (q'-p')),$$
$$a[\gamma_{p,q}] = T^{-1}(a(q-p)).$$

これにより W はベクトル空間となり，$T : W \to V$ は線形同型写像となる．

一方，始点を一点固定し，そこにベクトル空間 V を「設置」するには次のように考える．一点 $p \in X$ に対し，基準ベクトル空間 V の元 v との組 (p, v) からなる集合を V_p とする：$V_p = \{(p, v); v \in V\}$. V_p に和およびスカラー倍を

$$(p, u) + (p, v) = (p, u + v),\ \ u, v \in V,$$

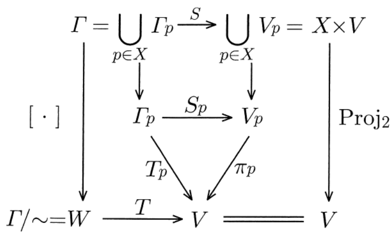
$$a(p,v) = (p, av),\quad a \in \mathbb{K},\ v \in V$$

で定めると V_p はベクトル空間をなす．和に関する零元は $(p,0)$ であり (p,v) の逆元は $(-1)(p,v) = (p,-v)$ で与えられる．ベクトル空間 V_p の元 $(p,v) = (p, q-p)$ を点 p に関する点 $q = p+v$ の**位置ベクトル**という．

命題 2.3　一点 $p \in X$ に対し V_p から V への写像 π_p を $\pi_p(p,v) = v$ で定めると $\pi_p : V_p \to V$ は線形同型となる．$\varGamma_p$ から V_p への写像 S_p を $S_p(\gamma_{p,q}) = (p, q-p)$ で定めると $S_p : \varGamma_p \to V_p$ は線形同型となり $\pi_p \circ S_p = T_p$ が成立する．

さて，$\varGamma = \bigcup_{p\in X} \varGamma_p$ から $X \times V = \bigcup_{p \in X} V_p$ への写像 S が $S(\gamma_{p,q}) = (p, q-p)$ で定まる．$p \in X$ を一つ固定すると S の作用は S_p に相当するものとなる．

以上を図式化すると右図のようになる．ここに $[\cdot]$ は同値類を与える写像，Proj_2 は第二成分への射影であり S_p, T_p, π_p, T は線形同型写像である．$S : \varGamma \to X \times V$ は X 上のバンドル同型とみなされる．



さて，「同じとみなす」方法の基礎をなす**同値関係**および**標準的同型**という 2 つの考え方について考察を深めよう．同値関係は空間（全体集合）の構造を強く規定するもので，互いに共通部分を持たない類（class）に分割する機能を持つ．2 つの元は，同値関係にあるとき同じ類に属し，**類別の観点から同じもの**とみなされる．学校における類別の一つにクラス分けがある．これは全体集合を分割することによって行われるものであり，同値関係は同じクラスに属すかどうかで決まる．同値関係の例として友人関係が取り上げられる場合もあるが，実社会では自明とは言えないので注意を要する．「自分は自分の友達（反射律）」なる主張は奇妙な表現であり，「自分はあの人を友達と思っていたのに，あの人は自分を友達と思っていない（対称性の破れ）」ということは良くありそうだし，「私の友人の友人はアル○○○」なる主張に推移律を適用すると大変なことになってしまう．

命題 2.2 の前半は，終点と始点との「差」を共通に持つ有向線分を，同類関係によって同じものとみなすことができると教えているのである．一方，一つの類には様々な元が属しているので，何か特別な構成員を選び出したり，本質的なものを構造を保ったまま抽出して，考察の対象とする場合がある（それは，類を一つの対象としてそのまま扱うよりも，その集合の構成員に対して具体的演算を施すほうが，類の性質を具体的に知る手掛りとなるからである）．前者は特別な代表元を選び出すことに相当し，後者は標準的な同型写像を構成することに相当する．命題 2.2 の後半に登場する $T : W \to V$ が，その標準的同型である．ここに標準的（canonical）とは特別な座標系，基底の取り方によらないという意味である．これで，有向線分の属す空間 $\varGamma$ に，平行移動で「同じ」

とみなす写像 $[\,\cdot\,] : \Gamma \to W$ および「実体としての」ベクトルを抽出する写像 $T : W \to V$ が構成され，高等学校の教科書を漸く理解することができた．また，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を，平行移動の基準となるベクトル空間 V としてばかりでなく，V を基準とするアフィン空間 X としても考える枠組みができた．

2.5 ノルム空間と内積空間

ベクトル空間に「大きさ」の概念を与えるのがノルムであり，ノルムを一つ備えたベクトル空間をノルム空間という．ベクトル空間 V 上の**ノルム**とは V から $\mathbb{R}$ への写像 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ で次の 3 つの条件を満たすものをいう：

(N1) （**正定値性**） $\|\cdot\|$ は非負値であり，$\|x\| = 0$ なる x は 0 に限る．

(N2) （**一次斉次性**） 任意の $a \in \mathbb{K}$ と $x \in V$ に対し $\|ax\| = |a|\|x\|$.

(N3) （**劣加法性**） 任意の $x, y \in V$ に対し $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

正定値性は，2 つのベクトル x, y が同じものであることを示す場合に有用である．一次斉次性は，スカラー倍とノルムとの両立条件とも考えられる．劣加法性を表す不等式は三角不等式ともいい，三角形の一辺の長さが他の二辺の長さの和を越えない事情を表している．ノルム空間には $d(x,y) = \|x - y\|$ として距離が導かれる．V は d により距離空間となり，基本近傍系を通じて収束や位相の概念が導入される．一つのベクトル空間に 2 つのノルムが与えられた場合，ノルム空間としては異なるものとなる．2 つのノルム $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ に対し，正の数 C, C' が存在し任意の $x \in V$ に対して不等式 $C\|x\| \leq |||x||| \leq C'\|x\|$ が成立するとき，その 2 つのノルムは**同値である**という．同値な 2 つのノルムは，同じ収束および同じ位相の概念をもたらす．ベクトル空間 V は有限次元ならばノルム空間となり，V 上の任意のノルムは同値となる．ノルムはベクトルの「大きさ」に相当するものであり，V を解析的視点から計測する道具でもある．有界閉区間 I 上の実数値連続関数全体のなすベクトル空間 $C(I)$ 上の一様ノルム $\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)|; t \in I\}$ と L^1 ノルム $\|u\|_1 = \int_I |u(t)|dt$ は同値ではなく，異なる収束と位相の概念を導く．毎年夏の電力一斉削減の指標は一様ノルムに基づいており，電気料金の積算根拠となる L^1 ノルムによるものとは異なった視点を取っている．ノルム空間は距離空間として完備であるとき**バナッハ空間**であるという．完備性はベクトル空間およびその上部構造（V 上の有界線形作用素や有界線形汎関数のなすノルム空間等）の位相的性質を決定する要因であると共に，非線形偏微分方程式への応用に関する基盤をなす概念である．それは，完備性が**存在**を保障するものだからである．

内積（スカラー積）の与えられたベクトル空間を内積空間という．ベクトル空間 V 上の内積とは直積空間 $V \times V$ から $\mathbb{K}$ への写像 $(\cdot|\cdot) : V \times V \ni (x, y) \mapsto (x|y) \in \mathbb{K}$ で次の 2 つを満たすものをいう：

(S1) （**正定値性**） つねに $(x|x) \geq 0$ であり，$(x|x) = 0$ なる x は 0 に限る．

(S2) （**一次半形式**） 第一変数について線形，第二変数について反線形である．

内積空間には $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ としてノルムが導かれ，ノルム空間となる．その証明にはシュワルツの不等式 $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$ が用いられる．シュワルツの

不等式は，$x, y \neq 0$ に対する等式（$\theta = \mathrm{Arg}(x|y)$ とする）

$$\mathrm{Re}(x|y) = \|x\|\|y\|\left(1 - \frac{1}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right),$$

$$|(x|y)| = (e^{-i\theta}x|y)$$

$$= \mathrm{Re}(e^{-i\theta}x|y) = \|x\|\|y\|\left(1 - \frac{1}{2}\left\|\frac{e^{-i\theta}x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right)$$

からも導かれる．完備な内積空間を**ヒルベルト空間**といい，自己双対性などの関数解析的に良い性質を持っている．偏微分方程式では，自乗可積分関数のなすルベーグ空間 L^2 や，L^2 の意味で一階微分可能な関数のなすソボレフ空間 H^1 が重要である．L^2 ノルムの評価においては，内積の形にして微分作用素の分数冪や部分積分を用いると良い評価が得られることがある．正定値性，対称性，自己双対性は，ヒルベルト空間において保証され独自性を発揮する．

2.6 ベクトル場と積分曲線

力をベクトル空間の元とみなす方法は第 2.3 節に述べた通りであるが，「始点」は常に原点を起点とすることになってしまい，不自然である．そこで，ニュートン力学における**配位空間**（configuration space）X とは実ベクトル空間 V を基準とするアフィン空間であると定義する．各点 $p \in X$ に対し，位置ベクトルのなす空間 V_p を**接空間**といい T_pX と表す．点 p を作用点とする力は T_pX の元であると理解すれば，力の起点は点 p であるという事情を記述することができる．その場合，第 2.3 節の (3) は「接空間 T_pX の原点 $(p, 0)$ としての作用点の存在」および「作用点 p において力の働いていない状態 $(p, 0)$ の存在」と言い換えられる．以下，簡単のため，位置のみに依存する力を考える．力の場をベクトル場として捉えるには，各 $p \in X$ に対し $F(p) \in T_pX$ を一つ対応させるもの，即ち写像 $F : X \to TX \equiv \bigcup_{p \in X} T_pX$ で $\mathrm{Proj}_1 \circ F = \mathrm{id}$ を満たすものと規定すれば良い．ここに $\mathrm{Proj}_1 : TX \ni (p, v) \mapsto p \in X$ は第一成分への自然な射影である．一般に，このような接バンドルの切断面（cross section）を**ベクトル場**という．各点に矢印を描いた図で説明されることがある．ベクトル場 F の積分曲線（integral curve）とは微分方程式

$$x'(t) = F(x(t)), \quad t \in I$$

の解 $x : I \to X$ のことである．大都市の地下鉄の駅構内を数々の矢印に支配されて歩くことは，ベクトル場に対する積分曲線を描くことに相当する．

参考文献

1) 新井朝雄，『物理現象の数学的諸原理』共立出版，2003.
2) S. Lang, “Differential Manifolds”, Addison-Wesley, 1971.
3) R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu, “Manifolds, Tensor Analysis, and Applications”, Second Edition, Springer, 1988.

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

経路積分と量子解析

第2回

いかにして量子現象を数理的に扱うか

古典力学から量子力学へ(1)

変分原理，ラグランジアンおよび経路積分量子化

鈴 木　増 雄

2.1 はじめに

量子力学と古典力学との関係を議論する際には，2つの立場が考えられる．一つは，ミクロでも成り立つ量子力学から出発して，不確定性が効かない（すなわち，プランク定数 $\hbar \to 0$ の）極限として，古典力学を捉える立場である．これは大変論理的で正統派の立場である．もう一つは，マクロな系で成り立つ古典力学という極めて直観的でわかり易い定式化から出発して，量子効果の入った定式化へと進化・発展させる立場である．経路積分による量子力学の定式化は，後者の立場である．その元祖はディラックである[1)]．彼は，古典力学のラグランジアン $\mathscr{L}(x(t), \dot{x}(t), t)(\equiv \mathscr{L}(t))$ を時間積分した作用 S を指数の肩に乗せた量

$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_\mathrm{a}}^{t_\mathrm{b}} \mathscr{L}(t)dt\right\} = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t_\mathrm{b}, t_\mathrm{a})\right\} = B(t_\mathrm{b}, t_\mathrm{a}) \tag{2.1}$$

が，2つの時刻 t_a，t_b の状態の間の遷移確率に“対応する”ことを見抜いた[1,2)]．ファインマンは，さらに，この“対応関係”を厳密な定式化へと発展させ，経路積分量子化の方法を発見した[2,3)]．

2.2 ファインマンの経路積分のアイデア：大局的な捉え方[4,5)]

ファインマンの経路積分は，式 (2.1) を始点 $x(t_\mathrm{a})$ と終点 $x(t_\mathrm{b})$ を固定したあらゆる経路について和をとったものであり，記号として

$$Z_{\mathrm{ini,fin}} = \int_{\mathrm{ini}}^{\mathrm{fin}} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_\mathrm{a}}^{t_\mathrm{b}} \mathscr{L}(x(t), \dot{x}(t), t)\right\} D[x(t)] \tag{2.2}$$

と書かれる[6~9)]．ただし，$\mathscr{L}$ はハミルトニアン $\mathscr{H}$ から，$\mathscr{L} = p\dot{x} - \mathscr{H}$ というルジャンドル変換で与えられる．

この定式化は通常のシュレーディンガーの波動方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\mathscr{H}\psi(x,t);\quad \mathscr{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{2.3}$$

による量子力学の定式化と比べて大きな特徴を持っている．それは，式 (2.3) が“微分”という局所的概念を用いて表現されているのに対して，式 (2.2) は“積分”という大局的概念を用いて表現されていることである．この違いは，単に形式的なもの（微分と積分は互いに逆演算であること）ではなく，自然法則の捉え方の違いを与える極めて根の深いものであると思われる．実際，ニュートンの古典力学は

$$m\ddot{x}(t)=\text{力}\left(=F(x(t))\equiv-\frac{dV(x)}{dx}\right) \tag{2.4}$$

という微分方程式で表され，それを数学的に発展させて整理した解析力学のハミルトン・ヤコビ方程式

$$\mathscr{H}\left(x,\frac{\partial S}{\partial t},t\right)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=0 \tag{2.5}$$

で記述することもできる．ここで，

$$\psi(x,t)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(x,t)\right) \tag{2.6}$$

とおくと，容易に式 (2.5) は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+V(x)\psi \tag{2.7}$$

と変形できる[9]．シュレーディンガー方程式 (2.3) と古典的表式 (2.7) は良く似ている．ただし，古典力学の非線形の部分 $(\partial\psi/\partial x)^2/\psi$ を，2 階の線形微分演算式 $\partial^2\psi/\partial x^2$ に置き換えて量子力学の基礎方程式としたところがシュレーディンガーの卓見である．この例では，参考にした方程式よりも，より簡単で美しい方程式が真の物理法則を表しており，まことに見事である．このように，局所的な捉え方では，法則を表す方程式が直接的に発見されることがあり，最初に法則を発見するのに，この局所的な捉え方は大変有効である．

それに対して，変分原理やそれと関連する経路積分は物理法則を大局的に捉える見方であり，法則自体を初めて見つけるというよりは，むしろ物理法則をより深く統一的に理解するのに適した物理の理論である．言い換えると，物理法則を大局的に捉える方向性が物理的直観で見えてきて，調和振動子のような簡単な系でそのアイデアが正しいことがわかっても，それを一般化したり，数学的に厳密に定式化するのは容易でないということである．

実際に，ファインマンのような天才的な理論物理学者でも，大学院生のときに思いついた経路積分量子化の方法を発展させるのに時間を要したようである[2,3]．思うに，ファインマンはハイスクールの物理教師の一言で，物理法則の大局的見方に目覚めたのかもしれない[4]．ニュートンの法則を用いて粒子の運動を説明する教師の講義に退屈していたファインマンを見た先生は，「ファインマン君，この問題を変分原理を用いて扱ってみなさい.」と物理の深い捉え方のあることを教えた．それ以来，ファインマンは，物理が前より一層面白い学科目になったと述懐している．若いときに良き師に出会うことがいかに大切かを如

実に表している例かとつくづく思う．読者の中にも思い当たる人が多いのではないだろうか．筆者も，恩師の久保亮五先生，M.E. Fisher 先生，I. Prigogine 先生たちとの出会いの影響を受けて物理探究の強い意欲を今なお持ち続けている．例えば，散逸系のダイナミクスを変分原理で表す散逸ラグランジアンを見つけ，それを用いて散逸系の経路積分量子化を定式化することに現在没頭している．散逸系の特徴は熱の発生とエントロピー増大であるから，散逸ラグランジアンは熱の発生の項が含まれているはずであると数年前から見当はついていた．しかし，それをどのように定式化するか，どのように変分を実行してオイラー・ラグランジュ方程式に相当する粘性抵抗を持った（散逸のある）運動方程式を導くか，その数学的処法が見つからず，四苦八苦していた．最近やっとこの長年の難問を解決することができた[10~12]．これについては，次回に詳しく解説する予定である．

2.3 経路積分と変分原理

解析力学[13]でよく知られているように，古典力学にしたがう運動の軌道は，式 (2.1) で定義される作用 $S(t_{\mathrm{b}}, t_{\mathrm{a}})$ を極小にする変分原理[5,7,14]で与えられる．極値を決める条件としてのオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \tag{2.8}$$

が系の運動方程式 “$m\ddot{x}(t) =$ 力” を与える（逆に，そうなるようにラグランジアンを定義する）．したがって，古典力学の運動方程式の解 $x = x_{\mathrm{cl}}(t)$ に対する作用は極小または停留値となり，式 (2.1) の指数関数の振動が少なく全体として一番大きな値を持つ．図 2.1 に示すように，古典解のまわりの（オフシェルの）軌道もそれなりに作用 S に寄与する．それらが量子的なゆらぎの効果を与える．

実際に，式 (2.2) は

$$Z_{\mathrm{ini,fin}} = \cos\left(\frac{1}{\hbar}S(t_{\mathrm{b}}, t_{\mathrm{a}})\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{\hbar}S(t_{\mathrm{b}}, t_{\mathrm{a}})\right) \tag{2.9}$$

と変形できるので，作用 $S(t_{\mathrm{b}}, t_{\mathrm{a}})$ がプランク定数 $\hbar$ より大きくなると，それら

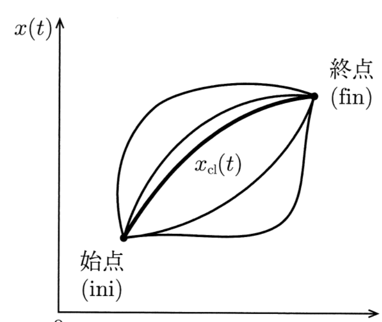


図 2.1　古典解 $x_{\mathrm{cl}}(t)$ とそのまわりのさまざまな経路．

の実部も虚部も激しく正負に振動するようになり，和をとると互いに打ち消し合って $Z_{\mathrm{ini,fin}}$ に効かなくなる．すなわち，作用 $S(t_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{a}})$ に対する変分原理を満たす古典解が一番大きな寄与をする．

このように，変分原理は経路積分量子化の概念的な出発点となっている．

2.4 簡単な系で経路積分量子化の特徴を捉える

物理の本質は簡単な典型例で理解できることが多い．経路積分の方法も 1 次元調和振動子の場合について説明するとわかり易い[3,5,9]．この系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2+\frac{1}{2}kx(t)^2\equiv\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx(t)^2 \tag{2.10}$$

の形に書けるから，それをルジャンドル変換して得られるラグランジアン $\mathscr{L}(t)$ は

$$\mathscr{L}(t)=p\dot{x}-\mathscr{H}=\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2-\frac{1}{2}kx(t)^2 \tag{2.11}$$

となる．ここで，m は振動子の質量，k はバネ定数である．したがって，この古典系としての固有振動数 ω は $\omega=(k/m)^{1/2}$ で与えられる．

始点 $(x_{\mathrm{a}},t_{\mathrm{a}})$ と終点 $(x_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{b}})$ を固定して解いた運動方程式 $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$ の古典解は

$$x_{\mathrm{cl}}(t)=\frac{x_{\mathrm{b}}\sin(\omega(t-t_{\mathrm{a}}))-x_{\mathrm{a}}\sin(\omega(t-t_{\mathrm{b}}))}{\sin(\omega(t_{\mathrm{b}}-t_{\mathrm{a}}))} \tag{2.12}$$

で与えられる．この古典解に対応する作用 $S_{\mathrm{cl}}(t_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{a}})$ は

$$S_{\mathrm{cl}}(t_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{a}})=\frac{m\omega}{2\sin(\omega(t_{\mathrm{b}}-t_{\mathrm{a}}))}\left[\left(x_{\mathrm{a}}^2+x_{\mathrm{b}}^2\right)\cos(\omega(t_{\mathrm{b}}-t_{\mathrm{a}}))-2x_{\mathrm{a}}x_{\mathrm{b}}\right] \tag{2.13}$$

となる[3]．この古典的な作用を用いて，調和振動子の量子振幅の古典近似

$$Z_{\mathrm{ini,fin}}^{(\mathrm{cl})}=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_{\mathrm{cl}}(t_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{a}})\right] \tag{2.14}$$

が得られる．

この物理的意味を理解するために，バネ定数 k を零（すなわち $\omega=0$）と，より簡単にしてみる．こうして，自由粒子に対する古典近似式

$$Z_{\mathrm{ini,fin}}^{(\mathrm{cl,free})}=\exp\left(\frac{\mathrm{i}m(x_{\mathrm{b}}-x_{\mathrm{a}})^2}{2\hbar(t_{\mathrm{b}}-t_{\mathrm{a}})}\right) \tag{2.15}$$

が得られる．すなわち，自由粒子の古典近似の振幅は拡散型のゆらぎを示し，その分数（広がり）は $\hbar(t_{\mathrm{b}}-t_{\mathrm{a}})$ に比例する．これは，量子ゆらぎの確率的側面を表している．

さらに，終点 $(x_{\mathrm{b}},t_{\mathrm{b}})$ を変数と見て (x,t) と表し，規格化した振幅を $\psi(x,t)$ と書くと，これは，

$$\psi(x,t)=\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar(t-t_{\mathrm{a}})}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m(x-x_{\mathrm{a}})^2}{2\hbar(t-t_{\mathrm{a}})}\right) \tag{2.16}$$

となる．したがって，この $\psi(x,t)$ は次の偏微分方程式を満たす：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t). \tag{2.17}$$

これは，自由粒子のシュレーディンガー方程式に他ならない．

同様にして，式 (2.10) で記述される（$k \neq 0$ の）調和振動子の場合（式 (2.10)）にも，古典解 (2.12) に対する作用 (2.13) に基づく振幅 (2.14) は，$t_b = t, x_b = x$ と書き直した変数を用いて，シュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right)\psi(x,t) \tag{2.18}$$

を満たすことがわかる．

古典解という経路の一部だけを用いた振幅が厳密にシュレーディンガー方程式を満たすのは，ポテンシャル $V(x)$ が x の 2 次式（$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + (1\text{ 次式})$）で表される場合の特殊性による[3]．それは，他の経路についても，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-a(x_1-x)^2 - b(x-x_2)^2\right]dx = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^{-1}+b^{-1}}\right] \tag{2.19}$$

を用いて計算すると，数因子を除いて，古典近似と同じ式になることから容易に理解できる．ポテンシャルが 2 次式で表される系は，力が線形であるため，古典的にも加法性が成り立ち，量子力学の基礎方程式の線形性が見え易い情況になっていると言える．この意味で，ファインマンが最初に調和振動子の経路積分表示に目をつけたことは，我々が新しい物理の理論を開拓する際の手本となるであろう．

ガウスが誤差論で見つけたガウス分布，すなわち 2 次式の指数関数は，上の式 (2.19) のようにコンボリューションをとっても同形になったり，積分が円の面積を表すのに使われる超越数 π と関係したり，いろいろ美しい性質を持っている．

2.5 変分原理におけるラグランジアンの物理的意味

(i) 一般的考察

前節までの議論において，変分原理が重要な役割を果たすことが示された．しかも，系のハミルトニアンではなく，それからルジャンドル変換で導かれるラグランジアンが変分関数の働きをしてきた．数学的には，作用

$$S(t_\mathrm{b}, t_\mathrm{a}) = \int_{t_\mathrm{a}}^{t_\mathrm{b}}\mathscr{L}(t)dt \tag{2.20}$$

が極小また停留値となるという変分条件（オイラー・ラグランジュ方程式）(2.8) から系の運動方程式が得られれば，$\mathscr{L}(t)$ は何でもよいという見方もある．しかし，物理法則を統一的に深く理解する理論として変分原理を捉える立場に立てば，ラグランジアンが物理的に意味のあるものとして解釈できるのが望ましいであろう．実際，運動方程式を変分原理の解として与える変分の被積分関数は一意的には決まらない．すなわち，この逆問題の解は多数存在する．可逆な力学の場合は，通常，

$$\mathscr{L}(t) = T - V;\quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2, V = V(x(t)) \tag{2.21}$$

で与えられるラグランジアンを変分の被積分関数として用いる．しかし，次回

で述べるように，散逸力学系では，数学的に単に逆問題として解いた変分の被積分関数が物理的なものであるとは限らない[10~12]．そこで，散逸系の変分原理という長年の難問に対して，“物理的” ラグランジアンを探す指針となるように，ラグランジアン $\mathscr{L}$ の物理的意味・役割を詳しく議論しておこう．

簡単のために，ハミルトニアン $\mathscr{H}$ が時間によらない場合を考える．すなわち，$\mathscr{H} = T + V = E$ (一定) とする．ここで，保存力の場合には，$V = V(x)$ は力 $F(x)$ を用いて

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx' + E \tag{2.22}$$

の形に書ける．ただし，ポテンシャル V の基準を $x = x_0$ のとき $V = E$ にとった．当然のことながら，エネルギー保存則 $\mathscr{H} = E$ を時間 t で微分すると式

$$(m\ddot{x}_{\rm cl}(t) - F(x_{\rm cl}(t)))\dot{x}_{\rm cl}(t) = 0 \tag{2.23}$$

となる．

要するに，運動方程式の解 $x_{\rm cl}(t)$ とは限らない任意の関数 $x(t)$ に対して，積分

$$\hat{S}(t_{\rm b}, t_{\rm a}) = \int_{t_{\rm a}}^{t_{\rm b}} \left(T(\dot{x}(t)) + \int_{x_0}^{x(t)} F(x)dx \right) dt \equiv S_T + S_W \tag{2.24}$$

を考えると，式 (2.22) などから，これは

$$\hat{S}(t_{\rm b}, t_{\rm a}) = S(t_{\rm b}, t_{\rm a}) + E \cdot (t_{\rm b} - t_{\rm a}) \tag{2.25}$$

となり，作用 $S(t_{\rm b}, t_{\rm a})$ を極小にする問題は，式 (2.24) で定義される $\hat{S}(t_{\rm b}, t_{\rm a})$ の極小，停留値問題に帰着する．したがって，ラグランジアン $\mathscr{L}(t)$ の時間積分である作用 S の変分問題は，力が粒子になした仕事による作用 S_W と運動エネルギーによる作用 S_T とがつり合ったときに実際の古典軌道 $x = x_{\rm cl}(t)$ が実現されることを示している．

この解釈を拡張して散逸力学系の散逸ラグランジアンを発見することに筆者は最近成功した[10~12]．

(ii) 自然落下運動を例にラグランジアンの物理的意味を再考する

上で一般的に説明した内容を図 2.2 のような自然落下運動を例にして具体的に説明し，ラグランジアンを用いた変分原理の直観的な理解を深めたい．

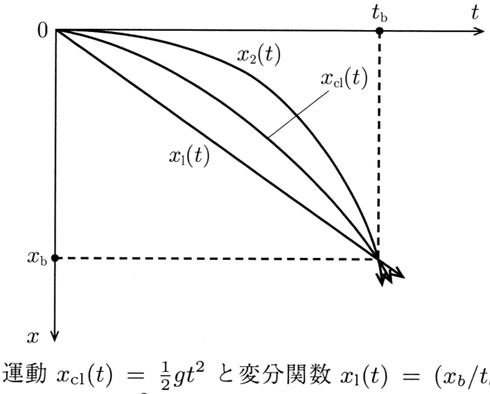


図 2.2　自然落下運動 $x_{\rm cl}(t) = \frac{1}{2}gt^2$ と変分関数 $x_1(t) = (x_b/t_b)t$ および $x_2(t) = at^2 + bt : bt_b = x - at^2$.

ii-a) 古典解の作用

まず古典解 $x = x_{\rm cl}(t) = \frac{1}{2}gt^2$ に対する作用 $S^{(\rm cl)} = S_T^{(\rm cl)} + S_W^{(\rm cl)}$ を求めると，

$$S_T^{(\rm cl)} = \frac{m}{2}\int_0^{t_{\rm b}} \dot{x}(t)^2 dt = \frac{1}{6}mg^2 t_{\rm b}^3, \tag{2.26}$$

および

$$S_W^{(\rm cl)} = \int_0^{t_{\rm b}} (-V(x(t)))dt = mg\int_0^{t_{\rm b}} x_{\rm cl}(t)dt = \frac{1}{6}mg^2 t_{\rm b}^3 \tag{2.27}$$

となり，2 つの作用 $S_T^{(\rm cl)}$ と $S_W^{(\rm cl)}$ とは予想通り，古典解 $x = x_{\rm cl}(t)$ に対しては一致している：$S_T^{(\rm cl)} = S_W^{(\rm cl)}$，　$S^{(\rm cl)} = S_T^{(\rm cl)} + S_W^{(\rm cl)} = \frac{1}{3}mg^2 t_{\rm b}^3$.

ii-b) 線形の変分関数 $x_{\rm l}(t) = (x_{\rm b}/t_{\rm b})t$ に対する作用

線形の変分関数の作用 S_T と S_W を求めると，$S_T^{(\rm l)} = \frac{1}{8}mg^2 t_{\rm b}^3$，および $S_W^{(\rm l)} = \frac{1}{4}mg^2 t_{\rm b}^3$ となり，$S_T^{(\rm l)} < S_W^{(\rm l)}$（すなわち，$S_T^{(\rm l)} \neq S_W^{(\rm l)}$）および $S^{(\rm l)} \equiv S_T^{(\rm l)} + S_W^{(\rm l)} = \frac{3}{8}mg^2 t_{\rm b}^3 > S^{(\rm cl)}$ の不等式が予想通り成り立っている．

ii-c) 古典解を含む一般の 2 次曲線に対する作用

一般の 2 次変分関数 $x(t) = at^2 + bt$ に対する 2 つの作用 $S_T(a)$ と $S_W(a)$ は，$b = (x_{\rm b} - at_{\rm b}^2)/t_{\rm b}$ として，

$$S_T(a) = \frac{m}{2}\int_0^{t_{\rm b}} \dot{x}(t)^2 dt = \left(\frac{a^2}{6} + \frac{g^2}{8}\right) mt_{\rm b}^3, \tag{2.28}$$

および

$$S_W(a) = \int_0^{t_{\rm b}} (-V(x(t)))dt = \left(-\frac{ag}{6} + \frac{g^2}{4}\right) mt_{\rm b}^3 \tag{2.29}$$

と与えられる．よって，任意の a に対する作用 $S(a) = S_T(a) + S_W(a)$ は，

$$S(a) = \left(\frac{1}{6}\left(a - \frac{g}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}g^2\right) mt_{\rm b}^3 \geqq S^{(\rm cl)} \tag{2.30}$$

と求まる．図 2.3 のように，$a = \frac{1}{2}g$ のとき，作用 $S(a)$ は極小値 $S^{(\rm cl)} = \frac{1}{3}mgt_{\rm b}^3$ となる．また，$S_T(a)$ と $S_W(a)$ との相対的な関係は

$$\Delta S(a) \equiv S_T(a) - S_W(a) = \left(a - \frac{g}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2}g\right) \cdot \frac{1}{6}mt_{\rm b}^3 \gtreqqless 0 \tag{2.31}$$

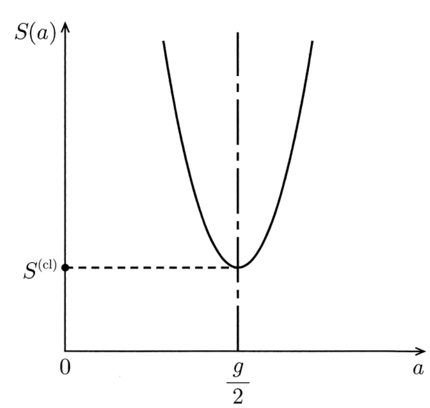


図 2.3　作用の曲率依存性（a-依存性）．$x(t) = at^2 + bt$ の曲率 κ は $\kappa = 2a/\left\{1 + (2at+b)^2\right\}^{3/2}$ で与えられる．$S(a)$ は，$a = \frac{1}{2}g$ のとき，最小値 $S^{(\rm cl)}$ をとる．

のようになる．$a=\frac{1}{2}g$，すなわち，古典的な解 $x_{\rm cl}(t)$ に対して，S_T と S_W が等しくなってバランスする．

ところで，関数 $x=f(t)\equiv at^2+bt$ に対する曲率 κ は $\kappa=\frac{2a}{(1+(2at+b)^2)^{3/2}}$ で与えられる．したがって，$2at+b$ が小さい時間領域では，$\kappa\simeq 2a$ と近似できるので，パラメータ a はこの時間領域では曲率パラメータとみてもよい．こうして，2 次の変分関数の範囲に限定すれば，作用は，図 2.3 のように，$x=x_{\rm cl}(t)$ の曲率のとき極小となる[15]．

変分関数のとり得る関数空間は無限次元であるから，曲率のような単なる一つのパラメータで作用の変化の様子を調べることはできないので，変分関数のとり方によっては，一般には，作用は $x=x_{\rm cl}(t)$ で極小とは限らず，停留値となることもある．

いずれにしても，作用がラグランジアンの時間積分で表されることの物理的意味づけができた．すなわち，運動エネルギーに対応する作用と，力による仕事による作用とのバランスで実際の古典的運動が決まる．

2.6 おわりに

今回は，ラグランジアンを用いる変分原理の物理的意味を詳しく解説し，それを用いた経路積分量子化の方法のアイデアと 2，3 の具体的な例を説明した．次回は，さらに一般的な物理系に対する経路積分の定式化を解説する．特に，今回説明したラグランジアン変分原理のアイデアを発展させた散逸系のラグランジアンとその変分原理[10~12]を詳しく述べる．

参考文献

1) P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, 1930 and 1958 (Fourth Edition)).
2) R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 371 (1948).
3) R.P. ファインマン/A.R. ヒッブス著，北原和夫訳，「ファインマン経路積分と量子力学」(マグロウヒル出版，1990)．
4) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol II. Reading MA (Addison-Wesley, 1964).
5) 鈴木増雄，「物理学における変分原理——自然は無駄を嫌う」，「パリティ」2010 年 8 月号（丸善出版）．
6) 鈴木増雄，本連載第 1 回「数理科学」2014 年 6 月号（サイエンス社）．
7) 鈴木増雄，「変分原理と物理学」，「パリティ」2012 年 9 月号～11 月号（丸善出版）．
8) 大貫義郎，柏太郎，鈴木増雄，『経路積分の方法』(岩波書店，2000 年)．
9) 加藤光裕，「ニュートン力学と解析力学」，「数理科学」2014 年 4 月号（サイエンス社）．
10) M. Suzuki, *Physica* **392A**, 314 (2013) の第 5 節．
11) M. Suzuki, APPC 12 のプロシーディングス（2014 年）．
12) M. Suzuki, to be submitted to *Physica A*.
13) 吉岡大二郎，『力学』(朝倉書店，2008 年)．
14) 鈴木増雄，「変分原理と物理学」，「パリティ」2012 年 4 月号より 2013 年 5 月号まで 14 回の連載記事（丸善出版）．
15) 長沼伸一郎，『物理数学の直観的方法』ブルーバックス（講談社，2011 年）．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

編集後記

今回の特集では様々な例題や問題を挙げながら，解説していただきました．ベクトル解析の奥深さが伝わったのではないでしょうか．

巻頭言で二木先生が「数学の学習において演習問題を解くことは大変効果的である．できるだけテキストなどを見ないで，自分で習ったことを再構築してみることが理解を深めることにつながるからである.」と述べられています．読者の皆さんもより理解を深めるために本特集を一度読んでみた後に，取り上げられている問題について何も見ずにノートに解答を作成してみるというのもよいのではないでしょうか．（R）

＊　　＊

以前，タイトルに“力”というワードの入った本が話題を集めました．ハウツー本が好きな私は，書店を回るとそのようなタイトルの本に非常に惹かれました．

さて，本号の特集テーマはベクトル解析の“力”です．電磁気学，流体力学をはじめとした物理での活躍や，数学においてはリーマン幾何学など様々な場面への拡がりが解説され，その“力”の強力さが現れているように思います．また，各記事では問題・例題を提示し，解説をしていただきました．ベクトル解析の“力”がわかる，魅力的な特集になったのではと思います．（T）

数　理　科　学　8月号

2014 年 8 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁